Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Wintersemester 2006/07 Übungsblatt 8

Abgabe: Mi 06.12. in der Vorlesung.

Wenn nichts anderes gesagt wird, ist k ein Körper und V ein Vektorraum.

Auf Anregung der ÜbungsgruppenleiterInnen mache ich ab sofort ein paar Änderungen bei den unbepunkteten Aufgaben. Jetzt gibt es reguläre Punkte (1 P.), Bonuspunkte (1 BP.) und Stern-Aufgaben (*). Holen Sie alle regulären Punkte – meistens sind es 16 – und keine Bonuspunkte, so erreichen Sie 100%. Auf dem vorliegenden Übungsblatt zum Beispiel können Sie mit Bonus- und regulären Punkten insgesamt 125% erreichen.

Neu sind die Stern-Aufgaben. Diese können z.B. Wiederholungs- oder anspruchsvolle Aufgaben sein. Für die Bearbeitung von Stern-Aufgaben erhalten Sie *keine* Punkte. In der Regel werden die Stern-Aufgaben auch nicht in der Übungsstunde besprochen – aber doch in meiner Sprechstunde: Mo 14-15 Uhr im Raum 3512, E-Abbe-Platz 2.

Aufgabe 1: Ist die angegebene Abbildung linear?

a) (1 P.) $f\colon k^2 \to k^2$, $f(x,y) = (-y,-x)$

b) (1 P.) $f\colon k^2 \to k$, $f(x,y) = x+y+1$

c) (1 P.) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$ (für $k = \mathbb{C}$)

d) (1 P.) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$ (für $k = \mathbb{R}$)

e) (*) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$

f) (*) $f\colon k^3 \to k$, $f(x,y,z) = (x-1)+(y-1)-2(z-1)$.

Aufgabe 2: Zur Erinnerung: eine Matrix $A \in M(m \times n, k)$ induziert eine lineare Abbildung $L_A\colon k^n \to k^m$, $v \mapsto A \cdot v$.

a) (2 P.) Berechnen Sie $L_M(u)$ für $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ und $u = (1,1) \in \mathbb{R}^2$.

b) (2 P.) Weisen Sie im allgemeinen Fall nach, dass L_A tatsächlich linear ist.

c) (2 P.) Sei B eine weitere Matrix derart, dass das Produkt AB existiert. Zeigen Sie: die Verknüpfung $L_A \circ L_B$ existiert, und es ist $L_A \circ L_B = L_{AB}$.

d) (2 BP.) Geben Sie ein Beispiel für Vektorräume U, V, W und lineare Abbildungen $g\colon U \to V$, $f\colon V \to W$ mit $f, g \neq 0$ aber $f \circ g = 0$.

(*) Finden Sie ein solches Beispiel mit $U = V = W$ und $f = g$?

Bitte wenden

Aufgabe 3: Sei $A \in M(m \times n, k)$ eine Matrix. Beachten Sie, dass die Spalten von A als ein System von n Vektoren in k^m aufgefasst werden können. Das von diesem System erzeugten Unterraum von k^m heißt der Spaltenraum von A.

a) (2 P.) Finden Sie eine Basis des Spaltenraums der reellen Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

b) (2 P.) Für jede Matrix A zeigen Sie: die Abbildung L_A ist genau dann injektiv, wenn die Spalten von A linear unabhängig sind.

c) (2 BP.) Zeigen Sie ferner: der Spaltenraum stimmt mit dem Bild von L_A überein.

Aufgabe 4: Herr X will alles über die geheime Abbildung der Firma Y herausfinden und beauftragt daher die Privatdetektiven Müller, Schmidt und Meier. Herr Müller durchsucht die Mülleimer der Firma und findet heraus, dass es sich um eine lineare Abbildung $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ handelt. Kurz darauf liefert Frau Schmidts Trojaner die Information, dass die Vektoren $(1, 0, 1, 1)$ und $(2, 1, 0, 1)$ im Kern von g liegen. Am nächsten Abend spielt Herr Meier Skat in der Kneipe um die Ecke vom Firmensitz und kriegt raus, dass $(1, 0, 2)$ und $(2, 1, 1)$ im Bild von g liegen.

(2 P.) Als wissenschaftliche Schreibkraft des Detektivbüros müssen Sie jetzt Herrn X die Dimension vom Kern und vom Bild von g melden.

(*) Auf der Häkelmechanik-Messe HäMe 2006 musste Herr X eine angeberische Präsentation der Firma Y erleben. Besonders beängstigend für ihn war die Ankündigung, dass auch sein Lieblingsvektor $(1, 1, 0)$ im Bild von g liegt. Deckt sich diese prahlerische Behauptung mit den Erkenntnissen von Müller, Schmidt und Meier?

Nominell erreichbare Punktzahl: 16