Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
M.Sc. Mikael Johansson

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Wintersemester 06/07 | Lösungen zu Übungsblatt 7

Wenn nichts anderes gesagt wird, ist k ein Körper und V ein Vektorraum.

Aufgabe 1: Gegeben seien Unterräume $U, W \subseteq V$, wobei $\dim(V) = 6$, $\dim(U) = 3$, $\dim(W) = 5$ und außerdem $U \nsubseteq W$.

a) (2 P.) Zeigen Sie: es ist $U + W = V$.

b) (1 P.) Bestimmen Sie $\dim(U \cap W)$.

c) (2 P.) Nun sei $k = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^6$ und $e_1, \ldots, e_6$ die Standardbasis. Ist es möglich, dass e_1 und $e_2 + e_4$ beide in $U \cap W$ liegen? (Beispiel oder Unmöglichkeitsbeweis)

Lösung:

a) Aus der Dimensionsformel wissen wir dass $\dim(U) + \dim(W) = \dim(U \cap W) + \dim(U + W)$. Nun ist ja $\dim(U) + \dim(W) = 3 + 5 = 8$, und somit muss $\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = 8$. Da, ja, $U \nsubseteq W$, muss $\dim(U \cap W) < 3$, denn wenn $\dim(U \cap W) = \dim(U)$ gilt, dann ist $U = U \cap W$, und somit $U \subseteq W$. Also muss $\dim(U + W) > 5$, und somit muss $\dim(U + W) = 6$, denn $U, W \leq V$.

b) Da $\dim(U + W) = 6$, folgt wieder aus der Dimensionformel $\dim(U \cap W) = 2$.

c) Lass $U = \mathrm{Spann}(e_1, e_2 + e_4, e_3)$ und $W = \mathrm{Spann}(e_1, e_2, e_4, e_5, e_6)$. Dann ist $\dim(U) = 3$, $\dim(W) = 5$ und $U \cap W = \mathrm{Spann}(e_1, e_2 + e_4)$.

Aufgabe 2: (2 P.) Gegeben seien Unterräume $U, W \subseteq V$, wobei $\dim(V) = 5$, $\dim(U) = 3$, $\dim(W) = 2$ und außerdem $U + W = V$. Zeigen Sie, dass die Summe $U + W$ direkt ist.

Lösung: Wir wenden uns wieder an die Dimensionsformel. Wir sehen dass $\dim(U) + \dim(W) = 3 + 2 = 5 = \dim(V) = \dim(U + W)$. Daher ist $\dim(U \cap W) = 0$, und somit $U \cap W = \{0\}$, und somit ist die Summe direkt.

Aufgabe 3: Seien $U, W \subseteq V$ zwei Unterräume mit der folgenden Eigenschaft: es gibt eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V derart, dass jedes v_i in der Differenz $W \setminus U$ liegt.

a) (2 P.) Muss $W = V$ gelten? (Beweis oder Gegenbeispiel)

b) (2 P.) Muss $U = \{0\}$ gelten? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Lösung:

a) Wenn jede v_i in der Differenz $W \setminus U$ liegt, dann liegt vor allem jede $v_i \in W$. Daher liegt auch $\text{Spann}(v_1, \ldots, v_n) \subseteq W$. Aber, nun ist $V = \text{Spann}(v_1, \ldots, v_n) \subseteq W \subseteq V$, und somit ist $W = V$.

b) Ist $V = \mathbb{R}^3$, mit dem Standardbasis. Ist, weiterhin $U = \text{Spann}(e_1 + e_2)$. Dann sind alle Basisvektoren ausserhalb U, jedoch ist $U \neq \{0\}$.

Aufgabe 4: (3 P.) Finden Sie ein Komplement des Unterraums $U = \text{Spann}(v_1, v_2, v_3)$ in $\mathbb{R}^4$, wobei $v_1 = (1, 1, 0, 3)$, $v_2 = (2, 0, 1, 2)$ und $v_3 = (0, 2, -1, 4)$.

Lösung: Ein Komplement zu U ist ein Unterraum W, mit $U \cap W = \{0\}$ und $U + W = V$. Nun ist $\dim(V) = 4$, und somit, um die erwartete Dimension des Komplements zu finden, mussen wir feststellen ob v_1, v_2, v_3 tatsächlich ein Basis sind.
Sind nun $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ mit $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0$, dann ist (mittles erste Koordinate) $a_1 + 2a_2 = 0$, und somit $a_1 = -2a_2$. Mittles die zweite Koordinate erhalten wir $a_1 + 2a_3 = 0$, und somit $a_2 = a_3$. Das heisst, dass $a_1 = 2$, $a_2 = -1$, $a_3 = -1$ funktionieren sollte. Dann wird $2v_1 - v_2 - v_3 = (0, 0, 0, 0)$, und somit sind die Vektoren linear abhängig. Wir streichen uns eins davon: zum Beispiel v_3, und stellen fest dass v_1, v_2 linear unabhängig sind, denn wenn $a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$, dann ist $a_1 = 0$ wegen der zweite Koordinate und $a_2 = 0$ wegen der dritten Koordinate.
Daher ist v_1, v_2 ein Basis für U, und wir können feststellen, dass $\dim(U) = 2$, und daher dass auch W Dimension 2 braucht. Noch dazu muss $U \cap W = \{0\}$, was wir durch wählen einer Basis für W die nicht in U liegt erreichen.
Ein Erzeugendesystem für $\mathbb{R}^4$ ist $v_1, v_2, e_1, e_2, e_3, e_4$. Dies ist ganz offensichtlich linear abhängig, aber wenn wir zwei Vektoren wegstreichen können, dann wird es wieder linear unabhängig. Aus $v_1 = e_1 + e_2 + 3e_4$ folgt dass $e_2 = v_1 - e_1 - 3e_4$, und somit können wir e_2 streichen. Aus $v_2 = 2e_1 + e_3 + 2e_4$ folgt dann $e_3 = v_2 - 2e_1 - 2e_4$, und so können wir auch e_3 streichen. Daher erzeugt v_1, v_2, e_1, e_4 die gesamte $\mathbb{R}^4$. Linear unabhängig ist dieses System auch noch, denn ist $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 e_1 + a_4 e_4 = 0$, dann ist wegen der zweiten Koordinat $a_1 = 0$, und wegen der dritten $a_2 = 0$. Danach wird wegen der ersten Koordinat auch $a_3 = 0$ und schliesslich wegen der vierten auch $a_4 = 0$.
Aus der linearen unabhängigkeit können wir schliessen dass $e_1, e_4 \notin \text{Spann}(v_1, v_2)$, und daher dass $W = \text{Spann}(e_1, e_4)$ ein Komplement zu U in $\mathbb{R}^4$ ist.

Aufgabe 5: (2 P.) Welche Eigenschaft bzw. Eigenschaften muss ein Vektor $v \in V$ besitzen, damit er in *keiner* Basis von V vorkommt? (Annahme: V ist endlich erzeugt.)

Lösung: Ist V endlich erzeugt, dann können wir jede lineare unabhängiges System in V zu einer Basis ergänzen, und daher muss v alleine auch schon linear abhängig sein.
Dies gilt für genau einen Vektor in ein Vektorraum: der Nullvektor.

Aufgabe 6: Sei k der Körper $\mathbb{F}_2$ und V der k-Vektorraum k^2.

a) Listen Sie alle Unterräume von V auf. Geben Sie für jeden Unterraum auch eine Basis an.

b) Wieviele Unterräume sind eindimensional? Zeigen Sie, dass die Vereinigung aller eindimensionalen Unterräume selbst ein Unterraum von V ist.

c) Gilt eine ähnliche Aussage wie Problem 1c auf Blatt 6 auch für die Vereinigung von drei Unterräumen?

Lösung:

a) Die Unterräume sind, durch Basen bestimmt, genau $\{0\}$, $\{(1,0)\}$, $\{(0,1)\}$, $\{(1,1)\}$ und V.

b) Drei der Unterräume sind eindimensional. Da jede Vektor in V genau einen eindimensionalen Unterraum aufspannt, und keine zwei verschiedene nichttriviale Vektoren im gleichen eindimensionalen Unterraum liegen, sind die vorkommenden Basen genau alle nichttriviale Elemente aus V. Daher kommt ganz V vor in die Vereinigung der eindimensionalen Vektorräume.

c) Die Aussage

> Sind U_1, U_2, U_3 Unterräume von V. Dann ist $U_1 \cup U_2 \cup U_3$ nur dann ein Vektorraum, wenn zwei der Unterräume in einen dritten enthalten sind.

hat ein Gegenbeispiel in b).

Aufgabe 7: Sind $U_1, \ldots, U_n$ Unterräume von V, deren Summe direkt ist. Häufig schreibt man $\bigoplus_{i=1}^n U_i$ für diese direkte Summe, d.h. $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^n U_i := U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n$.
Zeigen Sie: es ist $\dim \bigoplus_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n \dim(U_i)$.

Lösung: Aus der Dimensionsformel und die Aufteilung

$$\bigoplus_{i=1}^n U_i = \left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} U_i \right) \oplus U_n$$

folgt dass

$$\dim \bigoplus_{i=1}^n U_i = \dim \left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} U_i \right) + \dim(U_n)$$

und von daher können wir folgern durch eine Induktion dass die Aussage hält.

Erreichbare Punktzahl: 16