Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Wintersemester 2006/07 — Übungsblatt 7

Abgabe: Mi 29.11. in der Vorlesung.

Wenn nichts anderes gesagt wird, ist k ein Körper und V ein Vektorraum.

Aufgabe 1: Gegeben seien Unterräume $U, W \subseteq V$, wobei $\dim(V) = 6$, $\dim(U) = 3$, $\dim(W) = 5$ und außerdem $U \not\subseteq W$.

a) (2 P.) Zeigen Sie: es ist $U + W = V$.

b) (1 P.) Bestimmen Sie $\dim(U \cap W)$.

c) (2 P.) Nun sei $k = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^6$ und $e_1, \dots, e_6$ die Standardbasis. Ist es möglich, dass e_1 und $e_2 + e_4$ beide in $U \cap W$ liegen? (Beispiel oder Unmöglichkeitsbeweis)

Aufgabe 2: (2 P.) Gegeben seien Unterräume $U, W \subseteq V$, wobei $\dim(V) = 5$, $\dim(U) = 3$, $\dim(W) = 2$ und außerdem $U + W = V$. Zeigen Sie, dass die Summe $U + W$ direkt ist.

Aufgabe 3: Seien $U, W \subseteq V$ zwei Unterräume mit der folgenden Eigenschaft: es gibt eine Basis $v_1, \dots, v_n$ von V derart, dass jedes v_i in der Differenz $W \setminus U$ liegt.

a) (2 P.) Muss $W = V$ gelten? (Beweis oder Gegenbeispiel)

b) (2 P.) Muss $U = \{0\}$ gelten? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Aufgabe 4: (3 P.) Finden Sie ein Komplement des Unterraums $U = \mathrm{Spann}(v_1, v_2, v_3)$ in $\mathbb{R}^4$, wobei $v_1 = (1, 1, 0, 3)$, $v_2 = (2, 0, 1, 2)$ und $v_3 = (0, 2, -1, 4)$.

Aufgabe 5: (2 P.) Welche Eigenschaft bzw. Eigenschaften muss ein Vektor $v \in V$ besitzen, damit er in *keiner* Basis von V vorkommt? (Annahme: V ist endlich erzeugt.)

Aufgabe 6: Sei k der Körper $\mathbb{F}_2$ und V der k-Vektorraum k^2.

a) Listen Sie alle Unterräume von V auf. Geben Sie für jeden Unterraum auch eine Basis an.

b) Wieviele Unterräume sind eindimensional? Zeigen Sie, dass die Vereinigung aller eindimensionalen Unterräume selbst ein Unterraum von V ist.

c) Gilt eine ähnliche Aussage wie Aufgabe 1c auf Blatt 6 auch für die Vereinigung von drei Unterräumen?

Aufgabe 7: Sind $U_1, \dots, U_n$ Unterräume von V, deren Summe direkt ist. Häufig schreibt man $\bigoplus_{i=1}^n U_i$ für diese direkte Summe, d.h. $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^n U_i := U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n$.

Zeigen Sie: es ist $\dim \bigoplus_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n \dim(U_i)$.

Erreichbare Punktzahl: 16