Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
M.Sc. Mikael Johansson

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Wintersemester 06/07 — Lösungen zu Übungsblatt 6

Wenn nichts anderes gesagt wird, ist k ein körper und V ein Vektorraum.
Aufgabe 1: Seien U_1, U_2 zwei Unterräume von V. Zeigen Sie:

a) (2 P.) Der Schnitt $U_1 \cap U_2$ ist ein Unterraum von V.

b) (2 P.) Die Summe $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2\}$ ist ein Unterraum von V.

c) (2 P.) Die Vereinigung $U_1 \cup U_2$ ist nur dann ein Unterraum von V, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gelten.

Lösung:

a) Sind $x, y \in U_1 \cap U_2$, $r \in k$. Dann ist $x - y \in U_1$ denn $x \in U_1$ und $y \in U_1$ und U_1 ist ein Unterraum. Gleich wird auch $x - y \in U_2$. Also ist $x - y \in U_1 \cap U_2$, und so ist es eine Untergruppe. Weiterhin ist $rx \in U_1$, denn U_1 ist ein Unterraum. Gleich ist $rx \in U_2$. Daher ist $rx \in U_1 \cap U_2$, und somit ist $U_1 \cap U_2$ ein Unterraum.

b) Sind $x, y \in U_1 + U_2$, $r \in k$. Sind weiterhin $x = u_1 + u_2$, und $y = v_1 + v_2$. Dann ist $x - y = u_1 + u_2 - v_1 - v_2 = (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2)$, und somit auf der erwartete Form um in $U_1 + U_2$ zu sein. Weiter ist $rx = ru_1 + ru_2$, auch eine Summe von Vektoren auf der erwartete Form.

c) Wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$, dann ist die Vereinigung schlicht und einfach der grössere der beiden Unterräume, und daher ein Unterraum. Bleibt uns noch zu zeigen, dass wenn dies nicht hält, dass dann kein Unterraum bleibt. Die beide Inklusionen halten beide nicht wenn es $x \in U_1$, $y \in U_2$ gibt mit $x \notin U_2$, $y \notin U_1$. Dann ist aber $x + y$ nicht in U_1, denn $y \notin U_1$, und auch nicht in U_2, denn $x \notin U_2$. Daher ist $x + y \notin U_1 \cup U_2$, und so ist $U_1 \cup U_2$ nicht geschlossen unter Addition von Vektoren.

Aufgabe 2: (2 P.) Finden Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$, die eine Basis des Lösungsraums der Gleichung $x + y - 2z = 0$ enthält.

Lösung: Zwei linear unabhängige Vektoren im Lösungsraum sind $v_1 = (1, 0, \frac{1}{2})$ und $v_2 = (0, 1, \frac{1}{2})$. Jede andere Vektor $v = (a, b, c)$ derart, dass $a + b - 2c = 0$ kann durch v_1, v_2 eindeutig ausgedruckt werden, dadurch dass $v = av_1 + b_2 = (a, 0, \frac{a}{2}) + (0, b, \frac{b}{2}) = (a, b, \frac{a+b}{2})$, welches die erwünschte (a, b, c) ergibt aus die Überlegung, dass $\frac{a+b}{2} = \frac{2c}{2} = c$. Also sind alle Vektoren aus dem Lösungsraum von diese beide eindeutig ausgedruckt, und v_1, v_2 ergeben eine Basis vom Lösungsraum. Der Vektor $v_3 = (0, 0, 1)$ ist linear unabhängig von den anderen beiden, und bildet daher mit den anderen beiden zusammen ein Basis für $\mathbb{R}^3$, denn $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ist als $av_1 + b_v 2 + (c - \frac{a+b}{2})v_3$ eindeutig in den Basisvektoren ausgedruckt.

Aufgabe 3: (3 P.) Finden Sie drei verschiedene Basen des Unterraums $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. (Änderungen der Reihenfolge zählen nicht!)

Lösung:
$(1, -1, 0), (1, 0, -1)$
$(1, 1, -2), (1, -2, 1))$
$(1, -1, 0), (1, 1, -2)$

Aufgabe 4: Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = e^x$. Für jedes $n \geq 0$ sei $g_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $g_n(x) = x^n$.
Aus der Analysis ist bekannt: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ und $f'(x) = f(x)$.
Zeigen Sie, dass $f(x)$ *keine* Linearkombination des unendlichen Systems $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist.

Lösung: Suppose $f(x)$ eine Linearkombination der g_i ist. Dann ist $f(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i g_i(x)$ ein Polynom in den einen Variabel x. Als solches hat $f(x)$ ein Grad, als Polynom, der auch fällt mit der Ableitung, so $f'(x)$ hat niedriger Grad als $f(x)$. Dann, aber, kann unmöglich $f(x) = f'(x)$, und daher ist $f(x)$ keine Linearkombination.

Aufgabe 5: Die Sinus-Funktion ist stetig, es ist $\sin(n\pi) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$, und $\sin(x) > 0$ für alle $x \in (0, \pi)$. Zeigen Sie: mit $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n!}\right)$ ist das unendliche System $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ linear unabhängig in $C^0(\mathbb{R})$.

Lösung: Angenommen es wäre linear abhängig. Dann gäbe es $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $i_0 < \cdots < i_n$ mit

$$a_0 \sin\left(\frac{x}{i_0!}\right) + a_1 \sin\left(\frac{x}{i_1!}\right) + \ldots a_n \sin\left(\frac{x}{i_n!}\right) = 0$$

Dann können wir als erstes überlegen was in der Punkt $x = (i_n - 1)!\pi$ passiert. Dort sind alle $\frac{x}{i_j!}$ für $j < n$ multipeln von π, und daher wird sin dort verschwinden. Es bleibt uns

$$a_n \sin\left(\frac{\pi}{i_n}\right) = 0$$

und mit $i_n > 1$ erhalten wir dann $\frac{\pi}{i_n} \in (0, \pi)$, und daher $a_n = 0$.
Auf diesem Wege können wir auf $a_j = 0$ schliessen für alle j mit $i_j > 1$. Bleibt uns höchstens den Fall $i_0 = 1$, und wir können auch dabei annehmen dass alle andere $a_i = 0$ sind. Dann gilt aber für $x = \pi/2$

$$a_0 \sin\left(\frac{\pi/2}{1}\right) = a_0 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

woraus wir folgern können dass $a_0 = 0$.

Aufgabe 6: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der Unterraum $\mathrm{Spann}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$, wobei $v_1 = (1, 2, 3, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1, 2)$, $v_3 = (1, -1, 0, 3)$, $v_4 = (0, 2, 2, 1)$ und $v_5 = (2, 1, 3, 3)$.

a) (3 P.) Bestimmen Sie eine Basis von U, die aus einigen der Vektoren v_i besteht.

b) Untersuchen Sie, wieviele verschiedene Basen sich aus den v_i zusammensetzen.

Lösung:

a) Wir schreiben unsere erzeugende Vektoren als Spalten in ein Matrix, um uns Überblick zu erschaffen, und manipulieren diese Matrix Schritt bei Schritt mit Spaltenoperationen um so viele Stellen wie möglich in dem Matrix zu Null zu bringen. Dies entspricht das finden von lineare Abhängigkeiten unter den v_i.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} :(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} :(v_1 - v_2, v_2, v_3 - v_2, v_4, v_5 - v_2)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} :(v_1 - v_2 - 2(v_5 - v_2), v_2, v_3 - v_2 + (v_5 - v_2), v_4, v_5 - v_2)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} :(v_1 - v_2 - 2(v_5 - v_2), v_2, v_3 - v_2 - (v_5 - v_2), v_4 - 2(v_5 - v_2), v_5 - v_2)$$

und an dieser Stelle können wir feststellen, dass die Vektoren $(1, 0, 1, 2)$, $(0, 0, 0, 3)$ und $(0, 1, 1, -1)$ linear unabhängig sind, denn ist $a(1, 0, 1, 2) + b(0, 0, 0, 3) + c(0, 1, 1, -1) = 0$, dann ist wegen der erste Koordinat $a = 0$, wegen der zweite Koordinat $c = 0$, und $b(0, 0, 0, 3) = 0$ genau dann wenn $b = 0$.

Also ist einen Basis aus den Vektoren v_2, $v_4 - 2(v_5 - v_2)$ und $v_5 - v_2$ erhältlich. Aber dann können wir gleich die Vektoren v_2, v_4, v_5 als Basis nehmen, denn wenn $v_2, v_4 - 2(v_5 - v_2), v_5 - v_2$ linear unabhängig sind, und $av_2 + bv_4 + cv_5 = 0$, dann ist auch $(a + c)v_2 + bv_4 + c(v_5 - v_2) = 0$, und auch $(a + c)v_2 + b(v_4 - 2(v_5 - v_2)) + (c - 2b)(v_5 - v_2) = 0$. Durch lineare unabhängigkeit von die drei Vektoren erhalten wir $a + c = 0$, $b = 0$ und $c - 2b = 0$. Mit $b = 0$ wird $c - 2b = c$, und so ist auch $c = 0$. Dann wird $a + c = a$, und somit $a = 0$.

b) Wir können aus die Berechnungen oben auch noch schliessen dass $v_1 - v_2 - 2(v_5 - v_2) = v_1 + v_2 - 2v_5 = 0$ und $v_3 - v_2 + (v_5 - v_2) = v_3 - 2v_2 + v_5 = 0$. Diese können wir umschreiben in $v_1 = 2v_5 - v_2$ und $v_3 = v_5 - 2v_2$. Daher folgt dass $v_1, v_3 \in \text{Spann}(v_2, v_5)$.

Weiterhin können wir aus $v_3 = v_5 - 2v_2$ schliessen dass $v_5 = v_3 + 2v_2$, und daher $v_5 \in \text{Spann}(v_2, v_3)$. Durch einsetzen in $v_1 = 2v_5 - v_2$ erhalten wir $v_1 = 2v_3 + 4v_2 - v_2 = 2v_3 + 3v_2$, und damit auch $v_1 \in \text{Spann}(v_2, v_3)$.

Aus $v_1 = 2v_3 + 3v_2$ folgt $3v_2 = 2v_3 - v_1$, und daher ist $v_3 \in \text{Spann}(v_1, v_3)$. Durch einsetzen in $v_5 = v_3 + 2v_2$ erhalten wir $v_5 = v_3 + \frac{4}{3}v_3 - \frac{2}{3}v_1$, und daher $v_5 \in \text{Spann}(v_1, v_3)$.

Aus $v_1 + v_2 - 2v_5$ folgt $v_1 + v_2 = 2v_5$, und daher dass $v_5 \in \text{Spann}(v_1, v_2)$. Dann ist auch $v_3 = 2v_2 - v_5 = 2v_2 - \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 = \frac{3}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_1$, und somit auch $v_3 \in \text{Spann}(v_1, v_2)$.

Aus $v_1 + v_2 - 2v_5$ folgt $v_2 = 2v_5 - v_1$, und daher ist $v_2 \in \text{Spann}(v_1, v_5)$. Aus $v_5 = \frac{7}{3}v_3 - \frac{2}{3}v_1$ folgt $v_3 = \frac{3}{7}v_5 + \frac{2}{7}v_1$, und so auch $v_3 \in \text{Spann}(v_1, v_5)$.

Aus $v_5 = \frac{7}{3}v_3 - \frac{2}{3}v_1$ folgt $v_1 = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}v_5$, und so ist $v_1 \in \text{Spann}(v_3, v_5)$. Aus $v_5 = v_3 + 2v_2$ folgt $v_2 = \frac{1}{2}v_3 - \frac{1}{2}v_5$, und so ist auch $v_2 \in \text{Spann}(v_3, v_5)$.

Diese Berechnungen zeigen uns dass jede zwei von den v_1, v_2, v_3, v_5 liegt in dem Spann von jede zwei anderen davon. Dazu kommt auch dass v_4 in keine von diese liegen. Da jede zwei Vektoren von den anderen zwei aufgespannt werden, reicht es zu zeigen dass mit eine bestimmte Wahl von Vektoren v_4 nicht ausgedruckt werden kann. Zu diesem Zwecke nehme ich v_1, v_2 und zeige dass $v_4 \notin \text{Spann}(v_1, v_2)$. Ist $v_4 = av_1 + bv_2$, dann ist wegen den ersten Koordinat $0 = a + b$, und so ist $a = -b$. Also ist $v_4 = a(v_1 - v_2)$. Nun ist aber $v_1 - v_2 = (0, 2, 2, -2)$, und so muss wegen der zweite Koordinat $a = 1$, aber wegen der vierte Koordinat $a = -\frac{1}{2}$. Daher können wir keine a, b finden so dass $v_4 = av_1 + bv_2$, und so liegt v_4 nicht in $\text{Spann}(v_1, v_2, v_3, v_5)$.

Aus diesen ganzen Überlegungen folgt nun dass ein Basis aus v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 besteht aus v_4 und ein Basis aus v_1, v_2, v_3, v_5, zu den jede von die 6 oben aufgelistete Paare gut funktionieren, aber keine andere.

Aufgabe 7: (2 P.) Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Die Relation $\sim$ auf V wird wie folgt definiert: es ist $v \sim w$ genau dann, wenn $w - v \in U$ gilt. Zeigen Sie: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf V.

Lösung: Reflexivität: Ist $x \in V$. $x - x = 0 \in U$ per Definition.
Symmetrie: Sind $x, y \in V$. $x \sim y$ heisst $x - y \in U$. Dann aber ist $y - x = -(x - y) \in U$, und daher $y \sim x$.
Transitivität: Sind $x, y, z \in V$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$. Dann ist $x - z = x - y + y - z$, und $x - y \in U$ denn $x \sim y$ und $y - z \in U$ denn $y \sim z$, und daher ist $x - z$ eine Summe von zwei Vektoren in U, und daher ist $x - z \in U$.

Erreichbare Punktzahl: 16