Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Wintersemester 2006/07 Übungsblatt 6

Abgabe: Mi 22.11. in der Vorlesung.

Wenn nichts anderes gesagt wird, ist k ein körper und V ein Vektorraum.

Aufgabe 1: Seien U_1, U_2 zwei Unterräume von V. Zeigen Sie:

a) (2 P.) Der Schnitt $U_1 \cap U_2$ ist ein Unterraum von V.

b) (2 P.) Die Summe $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2\}$ ist ein Unterraum von V.

c) (2 P.) Die Vereinigung $U_1 \cup U_2$ ist nur dann ein Unterraum von V, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gelten.

Aufgabe 2: (2 P.) Finden Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$, die eine Basis des Lösungsraums der Gleichung $x + y - 2z = 0$ enthält.

Aufgabe 3: (3 P.) Finden Sie drei verschiedene Basen des Unterraums $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. (Änderungen der Reihenfolge zählen nicht!)

Aufgabe 4: Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = e^x$. Für jedes $n \geq 0$ sei $g_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $g_n(x) = x^n$.

Aus der Analysis ist bekannt: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ und $f'(x) = f(x)$.

Zeigen Sie, dass $f(x)$ *keine* Linearkombination des unendlichen Systems $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist.

Aufgabe 5: Die Sinus-Funktion ist stetig, es ist $\sin(n\pi) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$, und $\sin(x) > 0$ für alle $x \in (0, \pi)$. Zeigen Sie: mit $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n!}\right)$ ist das unendliche System $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ linear unabhängig in $C^0(\mathbb{R})$.

Aufgabe 6: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der Unterraum $\mathrm{Spann}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$, wobei $v_1 = (1, 2, 3, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1, 2)$, $v_3 = (1, -1, 0, 3)$, $v_4 = (0, 2, 2, 1)$ und $v_5 = (2, 1, 3, 3)$.

a) (3 P.) Bestimmen Sie eine Basis von U, die aus einigen der Vektoren v_i besteht.

b) Untersuchen Sie, wieviele verschiedene Basen sich aus den v_i zusammensetzen.

Aufgabe 7: (2 P.) Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Die Relation $\sim$ auf V wird wie folgt definiert: es ist $v \sim w$ genau dann, wenn $w - v \in U$ gilt. Zeigen Sie: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf V.

Erreichbare Punktzahl: 16