

## Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Wintersemester 06/07

Lösungen zu Übungsblatt 5

**Aufgabe 1:** (1 P.) Zeigen Sie, dass die komplexen Zahlen das Distributivgesetz erfüllen.

**Lösung:** Das Distributivgesetz sagt aus, daß für komplexe Zahlen  $z, w, v$ ,  $z(v+w) = zv + zw$ . Nun setze  $z = x_1 + iy_1$ ,  $v = x_2 + iy_2$  und  $w = x_3 + iy_3$ . Dann ist

$$\begin{aligned}z(v+w) &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2 + x_3 + iy_3) \\&= (x_1 + iy_1)((x_2 + x_3) + i(y_2 + y_3)) \\&= (x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3)) + i(x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3)) \\&= x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3 + i(x_1y_2 + x_1y_3 + y_1x_2 + y_1x_3) \\&= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1x_3 - y_1y_3) + i(x_1y_2 + y_1x_2) + i(x_1y_3 + y_1x_3) \\&= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1x_3 - y_1y_3) + i(x_1y_3 + y_1x_3) \\&= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) + (x_1 + iy_1)(x_3 + iy_3) \\&= zv + vw\end{aligned}$$

und somit ist die Aussage bewiesen.

**Aufgabe 2:** Zeigen Sie: sind  $z, w$  zwei Komplexe Zahlen, so gelten  $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$  und  $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ . Folgern Sie, dass die Zahl  $i(z^7 - (\bar{z})^7)$  immer reell ist.

**Lösung:** Sind  $z = z_1 + iz_2$ ,  $w = w_1 + iw_2$ , so ist

$$\begin{aligned}\overline{z+w} &= \overline{z_1 + iz_2 + w_1 + iw_2} \\&= \overline{(z_1 + w_1) + i(z_2 + w_2)} \\&= z_1 + w_1 - i(z_2 + w_2) \\&= z_1 - iz_2 + w_1 - iw_2 \\&= \bar{z} + \bar{w}\end{aligned}$$

und weiterhin ist

$$\begin{aligned}\overline{z \cdot w} &= \overline{(z_1 + iz_2)(w_1 + iw_2)} \\&= \overline{z_1w_1 - z_2w_2 + i(z_1w_2 + z_2w_1)} \\&= z_1w_1 - z_2w_2 - i(z_1w_2 + z_2w_1) \\&= (z_1 - iz_2)(w_1 - iw_2) \\&= \bar{z} \cdot \bar{w}\end{aligned}$$

$(\bar{z})^7$  ist wegen die Multiplikativität der Konjugation gleich  $\overline{z^7}$ , und so gilt, für  $z^7 = x + yi$ , daß  $x^7 - (\bar{z})^7 = x + yi - (x - yi) = yi$ . Daher ist  $i(z^7 - (\bar{z})^7) = -y$ , und somit Reell.

**Aufgabe 3:** (3 P.) Sei  $V$  ein  $k$ -Vektorraum. Beweisen Sie: Für jedes  $v \in V$  und für jedes  $\lambda \in k$  gelten sowohl  $0_k \cdot v = \lambda \cdot 0_V = 0_V$  als auch  $(-\lambda)v = \lambda(-v) = -(\lambda v)$ .

**Lösung:**  $0_k \cdot v = (0_k + 0_k) \cdot v = 0_k \cdot v + 0_k \cdot v$ , und aus dieser Gleichung können wir  $0_k \cdot v$  kürzen. Das Ergebnis davon, denn wir kürzen innerhalb die abelsche Gruppe  $V$ , ist  $0_v = 0_k \cdot v$ .

Gleich können wir  $\lambda \cdot 0_v = \lambda \cdot (0_v + 0_v) = \lambda \cdot 0_v + \lambda \cdot 0_v$ , und wiederum können wir  $\lambda \cdot 0_v$  kürzen und erhalten somit  $0_v = \lambda \cdot 0_v$ .

Nun ist  $\lambda \cdot v + (-\lambda) \cdot v = (\lambda - \lambda) \cdot v = 0_k \cdot v = 0_v$ , und somit ist  $(-\lambda) \cdot v$  ein additives Invers zu  $\lambda \cdot v$ . Ähnlich ist  $\lambda \cdot v + \lambda \cdot (-v) = \lambda \cdot (v - v) = \lambda \cdot 0_v = 0_v$ , und so ist auch  $\lambda \cdot (-v)$  ein additives Invers.

**Aufgabe 4:** Sei  $V$  die Menge aller reellen Polynome vom Grad höchstens 5, die sowohl in  $x = 0$  als auch in  $x = 2$  eine Nullstelle haben.

- a) (2 P.) Zeigen Sie, dass  $V$  ein reeller Vektorraum ist.  
 b) Finden Sie drei linear unabhängige Elemente von  $V$ .

**Lösung:**

a) Sind  $f$  und  $g$  zwei Polynome von Grad höchstens 5 mit  $f(0) = f(2) = g(0) = g(2) = 0$ , so sind auch  $f + g$ ,  $f - g$  und  $\lambda f$  solche, denn der Grad wird weder durch Veränderung der Koeffizienten noch durch Addition zweier Polynome grösser als der Grad der Polynom mit höchster Grad. Weiterhin gilt dass  $(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$ , und ähnlich für  $x = 2$  und  $f - g$ . Das Null-polynom hat grad kleiner als 5. Und schliesslich bleiben alle Distributivitätsgesetze und Assoziativitätsgesetze erhalten durch die Definition von Polynome.

b)  $x(x - 2)$ ,  $x^2(x - 2)$  und  $x(x - 2)^2$  sind alle linear unabhängig, denn wenn  $a_0, a_1, a_2$  erfüllen, dass  $a_0x(x - 2) + a_1x^2(x - 2) + a_2x(x - 2)^2 = 0$ , dann gilt durch ausmultiplizieren  $(a_1 + a_2)x^3 + (a_0 - 2a_1 + a_2)x^2 - 2(a_0 + a_2)x = 0$ . Durch gleichsetzen der Koeffizienten erhalten wir dann das Gleichungssystem

$$a_1 + a_2 = 0 \tag{1}$$

$$a_0 - 2a_1 + a_2 = 0 \tag{2}$$

$$a_0 + a_2 = 0 \tag{3}$$

und durch abziehen (2)-(3), kriegen wir  $-2a_1 = 0$  und daraus  $a_1 = 0$ . Dann ist aber (1) die Aussage  $0 + a_2 = 0$ , und somit ist  $a_2 = 0$ . Dann folgt aber aus (3) dass  $a_0 = 0$ .

**Aufgabe 5:** Beweisen oder widerlegen Sie: Die Elemente  $v_1, \dots, v_n$  des  $k$ -Vektorraums  $V$  sind linear unabhängig.

- a) (2 P.)  $k = \mathbb{R}$ ,  $V = \mathbb{R}^2$ ;  $v_1 = (1, 2)$ ,  $v_2 = (3, 1)$ ,  $v_3 = (1, -1)$ .  
 b) (2 P.)  $k = \mathbb{R}$ ,  $V = \mathbb{R}^3$ ;  $v_1 = (0, 1, 2)$ ,  $v_2 = (1, 1, 2)$ ,  $v_3 = (2, 1, 0)$ .

- c) (2 P.)  $k = \mathbb{C}$ ,  $V = \mathbb{C}^2$ ;  $v_1 = (1, -i)$ ,  $v_2 = (i, 1)$ ,  $v_3 = (0, 1)$ .
- d) (2 P.)  $k = \mathbb{R}$ ,  $V = \mathbb{R}^3$ ;  $v_1 = (1, 1, 0)$ ,  $v_2 = (0, 0, 0)$ ,  $v_3 = (0, 1, 1)$ .
- e) (2 P.)  $k = \mathbb{R}$ ,  $V = C^0(\mathbb{R})$ ;  $v_1 = \cos(x)$ ,  $v_2 = x^2$ ,  $v_3 = \sin(x)$ .
- f)  $k = \mathbb{Q}$ ,  $V = \mathbb{R}$ ;  $v_1 = 1$ ,  $v_2 = \sqrt{2}$ .
- g)  $k = \mathbb{Q}$ ,  $V = \mathbb{R}$ ;  $v_1 = 1$ ,  $v_2 = \sqrt{2}$ ,  $v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**Lösung:**

- a) Nicht linear unabhängig, denn  $-4v_1 + 3v_2 - 5v_3 = 0$ .
- b) Linear unabhängig, denn wenn  $a_1, a_2, a_3$  sind derart, dass  $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$ , dann ist

$$\begin{cases} a_2 + 2a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ 2a_1 + 2a_2 = 0 \end{cases}$$

und dann folgt aus der letzte Bedingung dass  $a_1 = -a_2$ . Dann aber ist aus der mittleren Bedingung  $a_3 = 0$ , und aus der ersten folgt dann  $a_2 = 0$ . Daher sind alle  $a_1, a_2, a_3$  derart genau  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ , und somit sind die Vektoren linear unabhängig.

- c) Nicht linear unabhängig, denn  $v_1 - iv_2 = 0$ .
- d) Nicht linear unabhängig, denn  $0v_1 + 1v_2 + 0v_3 = 0$ .
- e) Linear unabhängig, denn sind  $a_1, a_2, a_3$  derart dass  $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$ , dann erhalten wir aus dem Punkt  $x = 0$  dass  $a_0 = 0$ , und aus dem Punkt  $x = \pi/2$  erhalten wir  $a_2\pi^2/4 + a_3 = 0$ . Also muss  $a_3 = -a_2\pi^2/4$ . Jedoch erhalten wir aus dem Punkt  $x = 3\pi/2$  auch  $a_3 = -9a_2\pi^2/4$ . Also muss  $a_2 = 9a_2$ , und somit  $8a_2 = 0$ , und daher  $a_2 = 0$ . Daraus folgt dann auch  $a_3 = 0$ .
- f) Linear unabhängig. Angenommen sie wären linear abhängig. Dann wurde es  $a/b$  und  $p/q$  geben so dass  $a/b = p\sqrt{2}/q$ . Dann ist  $aq/bp = \sqrt{2}$ . Setzen wir  $c/d = aq/bp$  mit  $c, d$  Teilerfremd. Dann folgt aus  $c/d = \sqrt{2}$  dass  $c = d\sqrt{2}$ . Dann ist  $c^2 = 2d^2$ , und somit muss  $2|c^2$ . Dann aber gilt auch  $2|c$ , und somit können wir ein  $e = c/2$  finden. Dann ist  $d^2 = c^2/2 = (2e^2)/4 = 2(e/2)^2 = 2e^2$ . Also muss  $2|d$  auch gelten, und somit teilt 2 sowohl  $c$  als auch  $d$ . Dies widerspricht der Teilerfremdheit, und zeigt dass die Annahme falsch sein muss.
- g) Nicht linear unabhängig, denn  $2/\sqrt{2} = (\sqrt{2})^2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$  und daraus folgt dass  $v_2 - 2v_3 = 0$ .

**Aufgabe 6:** Moriarty – tatsächlich ein Mathematikprofessor – verkündet, dass die Menge  $\mathbb{Z}$  der ganzen Zahlen ein Vektorraum über den Körper  $\mathbb{F}_2$  ist. Die Addition wäre nämlich die übliche, und die Skalarmultiplikation wäre gegeben durch  $0 \cdot v = 0$ ,  $1 \cdot v = v$ .

Sherlock Holmes sieht sich daraufhin gezwungen, London fluchtartig und allein zu verlassen. Während er sich von Dr. Watson verabschiedet, erwähnt er, dass es sich um eine bösartige Täuschung handelt. Der arme

Watson weiß zwar aus Erfahrung, dass Holmes recht haben muss, und trotzdem kann er den Betrug nicht erkennen. Helfen Sie ihm nach!

**Lösung:** Es gilt  $2 = 1 + 1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = (1 + 1) \cdot 1 = 0 \cdot 1 = 0$ . Dies ist ein Widerspruch. Da aus der Axiome ein Widerspruch herleitbar ist können die Axiome nicht alle halten.

**Erreichbare Punktzahl:** 16