Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Wintersemester 2006/07 Übungsblatt 5

Abgabe: Mi 15.11. in der Vorlesung.

Die Vorlesung am **Fr 10.11.** findet **ausnahmsweise** im **Hörsaal 24 UHG** statt.

Bitte beachten Sie: Auch für die Lösung unbepunkteter Aufgaben und Aufgabenteile erhalten Sie Punkte. So können Sie pro Übungsserie *mehr* als 100% erzielen.

Aufgabe 1: (1 P.) Zeigen Sie, dass die komplexen Zahlen das Distributivgesetz erfüllen.

Aufgabe 2: Zeigen Sie: sind z, w zwei Komplexe Zahlen, so gelten $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ und $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$. Folgern Sie, dass die Zahl $i(z^7 - (\bar{z})^7)$ immer reell ist.

Aufgabe 3: (3 P.) Sei V ein k-Vektorraum. Beweisen Sie: Für jedes $v \in V$ und für jedes $\lambda \in k$ gelten sowohl $0_k \cdot v = \lambda \cdot 0_V = 0_V$ als auch $(-\lambda)v = \lambda(-v) = -(\lambda v)$.

Aufgabe 4: Sei V die Menge aller reellen Polynome vom Grad höchstens 5, die sowohl in $x = 0$ als auch in $x = 2$ eine Nullstelle haben.

a) (2 P.) Zeigen Sie, dass V ein reeller Vektorraum ist.
b) Finden Sie drei linear unabhängige Elemente von V.

Aufgabe 5: Beweisen oder widerlegen Sie: Die Elemente $v_1, \ldots, v_n$ des k-Vektorraums V sind linear unabhängig.

a) (2 P.) $k = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$; $v_1 = (1,2)$, $v_2 = (3,1)$, $v_3 = (1,-1)$.
b) (2 P.) $k = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$; $v_1 = (0,1,2)$, $v_2 = (1,1,2)$, $v_3 = (2,1,0)$.
c) (2 P.) $k = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^2$; $v_1 = (1,-i)$, $v_2 = (i,1)$, $v_3 = (0,1)$.
d) (2 P.) $k = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$; $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,0,0)$, $v_3 = (0,1,1)$.
e) (2 P.) $k = \mathbb{R}$, $V = C^0(\mathbb{R})$; $v_1 = \cos(x)$, $v_2 = x^2$, $v_3 = \sin(x)$.
f) $k = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{R}$; $v_1 = 1$, $v_2 = \sqrt{2}$.
g) $k = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{R}$; $v_1 = 1$, $v_2 = \sqrt{2}$, $v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Aufgabe 6: Moriarty – tatsächlich ein Mathematikprofessor – verkündet, dass die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ein Vektorraum über den Körper $\mathbb{F}_2$ ist. Die Addition wäre nämlich die übliche, und die Skalarmultiplikation wäre gegeben durch $0 \cdot v = 0$, $1 \cdot v = v$.

Sherlock Holmes sieht sich daraufhin gezwungen, London fluchtartig und allein zu verlassen. Während er sich von Dr. Watson verabschiedet, erwähnt er, dass es sich um eine bösartige Täuschung handelt. Der arme Watson weiß zwar aus Erfahrung, dass Holmes recht haben muss, und trotzdem kann er den Betrug nicht erkennen. Helfen Sie ihm nach!

Erreichbare Punktzahl: 16