Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
M.Sc. Mikael Johansson

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Wintersemester 06/07 — Lösungen zu Übungsblatt 4

Aufgabe 1: Die Definition des Gruppenbegriffs setzt die *Existenz* eines neutralen Elements voraus, sagt aber nichts ausdrückliches über dessen *Eindeutigkeit*. Das gleiche gilt auch für Inversen. Zeigen Sie trotzdem:

a) (2 P.) Sind e_1, e_2 zwei neutrale Elemente derselben Gruppe G, so gilt $e_1 = e_2$.

b) (2 P.) Ist $x \in G$, und sind $x', \hat{x}$ zwei Inversen von x, so ist $x' = \hat{x}$.

Lösung:

a) $e_1 = e_1 e_2$, da e_2 ein neutrales Element ist. $e_1 e_2 = e_2$ weil e_1 ein neutrales Element ist. Also ist, wegen transitivität der $=$, $e_1 = e_2$.

b) $x' = x'e$ da e ein neutrales Element ist. $x'e = x'x\hat{x}$, denn $e = x\hat{x}$ da $\hat{x}$ eine Inverse von x ist. Schliesslich ist $x'x = e$, da x' eine Inverse von x ist, und daher $x'x\hat{x} = e\hat{x} = \hat{x}$. Somit ist $x' = \hat{x}$.

Aufgabe 2: Sei $f\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie:

a) (2 P.) f bildet das neutrale Element von G auf das neutrale Element von H ab.

b) f bildet das Inverse von $x \in G$ auf das Inverse von $f(x) \in H$ ab.

Lösung:

a) Für ein beliebiges $x \in G$ gilt $x = ex$, und somit $f(x) = f(ex) = f(e)f(x)$. Nun, da für alle $x \in G$ gilt $f(x) = f(e)f(x)$ gilt es insbesondere für $e \in G$. Ist nun ein Element g aus eine Gruppe so, dass $g^2 = g$, dann ist, durch multiplikation mit g^{-1}, $g = e$. Daher ist $f(e)$ die Einheit in H, denn $f(e)^2 = f(e)$.

b) $e_H = f(e_G) = f(xx^{-1}) = f(x)f(x^{-1}$, und daher ist $f(x^{-1})$ das Inverse von $f(x)$.

Aufgabe 3: (2 P.) Sei σ bzw. $\tau \in S_4$ die Permutation $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ bzw. $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Berechnen Sie die Produkte $\sigma\tau$ und $\tau\sigma$.

Lösung: In $\sigma\tau$ wird 1 erst auf 1 dann auf 2 geschickt, 2 erst auf 4 dann auf 1, 3 erst auf 3 und dann auf 4, und 4 erst auf 2 und dann auf 3.
$\sigma\tau = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{smallmatrix}\right)$
In $\tau\sigma$ dagegen wird 1 erst auf 2 und dann auf 4 geschickt, 2 erst auf 3 und dann auf 3, 3 erst auf 4 und dann auf 2, und 4 erst auf 1 und dann auf 1.

$\tau\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

Aufgabe 4: Eine Permutation $\sigma \in S_n$ heißt eine *Transposition*, falls es i, j mit $i \neq j$ gibt, derart, dass

$$\sigma(i) = j \qquad \sigma(j) = i \qquad \sigma(k) = k \quad \text{für } k \neq i, j.$$

Beachten Sie, dass jede Transposition ihr eigenes Inverses ist.

a) (2 P.) Sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation mit $\sigma(n) \neq n$. Zeigen Sie, dass es eine Transposition $\tau \in S_n$ mit folgender Eigenschaft gibt: $\sigma\tau(n) = n$.

b) Zeigen Sie – etwa per Induktion über n –, dass jede Permutation in S_n sich als ein Produkt von Transpositionen schreiben lässt.

c) (3 P.) Schreiben Sie die Permutationen $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ als Produkte von Transpositionen.

Lösung:

a) Unter σ wird $\sigma^{-1}(n)$ zu n geschickt. Daher muss τ, um die Eigenschaft zu besitzen, n und σ^{-1} vertauschen. Dann ist $\sigma\tau(n) = \sigma(\sigma^{-1}(n)) = n$. Dieses τ mit $\tau(n) = \sigma^{-1}(n)$, $\tau(\sigma^{-1}(n)) = n$, $\tau(k) = k$ sonst, erfüllt die Eigenschaft und ist allgemein konstruiert.

b) Jede Permutation in S_2 ist ein Transposition, und daher ein Produkt von Transpositionen. Angenommen, dass jede Permutation von weniger als n Elemente tatsächlich als eine Produkt von Transpositionen sich schreiben lässt, und angenommen $\sigma \in S_n$. Entweder ist $\sigma(n) = n$ oder $\sigma(n) \neq n$. Ist $\sigma(n) = n$, dann ist σ eigentlicht eine Permutation von $n-1$ Elemente, und lässt sich deswegen als eine Produkt von Transpositionen schreiben. Ist $\sigma(n) \neq n$, dann können wir wie in a) eine Transposition τ finden, so dass $\pi = \sigma\tau(n) = n$. Dann ist π eine Permutation von $n-1$ Elemente und lässt sich als eine Produkt von Transpositionen schreiben. Schliesslich ist $\pi\tau = \sigma$, denn $\tau^{-1} = \tau$. Daher ist auch σ eine Produkt von Transpositionen.

c) Wir können die gerade aufgestellte Beweis einfach nachmachen, schritt bei schritt. Wir schreiben die Transpositionen als $(i \quad j)$.

$$\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{smallmatrix}\right) &= && \text{4 kommt von 3} \\
\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)(3 \quad 4) &= && \text{3 kommt von 2} \\
\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)(2 \quad 3)(3 \quad 4) &= (1 \quad 2)(2 \quad 3)(3 \quad 4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) &= && \text{5 kommt von 2} \\
\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)(2 \quad 5) &= && \text{4 kommt von 1} \\
\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)(1 \quad 4)(2 \quad 5) &= && \text{3 kommt von 2} \\
\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)(2 \quad 3)(1 \quad 4)(2 \quad 5) &= (2 \quad 3)(1 \quad 4)(2 \quad 5)
\end{aligned}$$

Aufgabe 5: (3 P.) Betrachten wir die Matrizen $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Berechnen Sie die Produkte $C = AB$ und $D = BA$. Welche der beiden Produkte AC, CA existiert?

Lösung:

$$C = AB = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0 \end{smallmatrix}\right) \qquad\qquad D = BA = \left(\begin{smallmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$$

AC existiert nicht, denn A hat drei Spalten, und C nur zwei Zeilen. CA, andererseits, existiert, denn A hat zwei Zeilen und C zwei Spalten.

$$CA = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 5 \end{smallmatrix}\right)$$