Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Wintersemester 2006/07 Übungsblatt 4

Abgabe: Mi 08.11. in der Vorlesung.

Aufgabe 1: Die Definition des Gruppenbegriffs setzt die *Existenz* eines neutralen Elements voraus, sagt aber nichts ausdrückliches über dessen *Eindeutigkeit*. Das gleiche gilt auch für Inversen. Zeigen Sie trotzdem:

a) (2 P.) Sind e_1, e_2 zwei neutrale Elemente derselben Gruppe G, so gilt $e_1 = e_2$.

b) (2 P.) Ist $x \in G$, und sind $x', \hat{x}$ zwei Inversen von x, so ist $x' = \hat{x}$.

Aufgabe 2: Sei $f \colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie:

a) (2 P.) f bildet das neutrale Element von G auf das neutrale Element von H ab.

b) f bildet das Inverse von $x \in G$ auf das Inverse von $f(x) \in H$ ab.

Aufgabe 3: (2 P.) Sei σ bzw. $\tau \in S_4$ die Permutation $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ bzw. $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Berechnen Sie die Produkte $\sigma\tau$ und $\tau\sigma$.

Aufgabe 4: Eine Permutation $\sigma \in S_n$ heißt eine *Transposition*, falls es i, j mit $i \neq j$ gibt, derart, dass

$$\sigma(i) = j \qquad \sigma(j) = i \qquad \sigma(k) = k \quad \text{für } k \neq i, j.$$

Beachten Sie, dass jede Transposition ihr eigenes Inverses ist.

a) (2 P.) Sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation mit $\sigma(n) \neq n$. Zeigen Sie, dass es eine Transposition $\tau \in S_n$ mit folgender Eigenschaft gibt: $\sigma\tau(n) = n$.

b) Zeigen Sie – etwa per Induktion über n –, dass jede Permutation in S_n sich als ein Produkt von Transpositionen schreiben lässt.

c) (3 P.) Schreiben Sie die Permutationen $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ als Produkte von Transpositionen.

Aufgabe 5: (3 P.) Betrachten wir die Matrizen $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Produkte $C = AB$ und $D = BA$. Welche der beiden Produkte AC, CA existiert?

Erreichbare Punktzahl: 16