Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
M.Sc. Mikael Johansson

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Wintersemester 06/07 — Lösungen zu Übungsblatt 3

Aufgabe 1: Ist die Relation R eine Äquivalenzrelation auf der Menge X? Begründen Sie Ihre Antworten.

a) (2 P.) $X = \mathbb{Z}$; $x\ R\ y$ genau dann, wenn $|y - x| \leq 3$.

b) (2 P.) $X = \mathbb{Q}$; $x\ R\ y$ genau dann, wenn $y - x$ eine ganze Zahl ist.

c) (2 P.) $X = \mathbb{R}$; $x\ R\ y$ genau dann, wenn $\frac{\sin(x)\cos(x^2)}{x^4+5} = \frac{\sin(y)\cos(y^2)}{y^4+5}$ gilt.

d) $X = \mathbb{N}$; $x\ R\ y$ genau dann, wenn weder $x = 2$ noch $y = 2$ gilt.

e) $X = \mathbb{Z}$; $x\ R\ y$ genau dann, wenn $x(y - 1) = y(x - 1)$ gilt.

Lösung:

a) Nein, denn dieses R ist nicht transitiv. Zum Beispiel ist $1\ R\ 3$ und $3\ R\ 5$ aber $1 \not R\ 5$.

b) Ja, denn $x - x = 0$ ist ganz für alle $x \in \mathbb{Q}$ (reflexiv), ist $x - y \in \mathbb{Z}$ und $y - z \in \mathbb{Z}$ so ist $x - z = x - y + y - z = (x - y) + (y - z)$ eine Summe von ganze Zahlen und somit ganz (transitiv) und auch ist $x - y \in \mathbb{Z}$ so ist $y - x \in \mathbb{Z}$ (symmetrisch).

c) Ja, denn mehr allgemein gilt für eine Abbildung f dass die Relation Q gegeben durch $x\ Q\ y$ genau dann, wenn $f(x) = f(y)$ wird eine Äquivalenzrelation, denn $f(x) = f(x)$ (reflexiv), ist $f(x) = f(y)$ und $f(y) = f(z)$ so ist $f(x) = f(z)$ (transitiv) und ist $f(x) = f(y)$ so ist $f(y) = f(x)$ (symmetrisch).
Daher ist dies auch den Fall hier, wenn $f(x) = \frac{\sin(x)\cos(x^2)}{x^4+5}$.

d) Nein, denn $2 \not R\ 2$, und somit ist diese Relation nicht reflexiv.

e) Diese Relation ist reflexiv, denn $x(x - 1) = x(x - 1)$, und auch symmetrisch, denn $x(y - 1) = y(x - 1)$ impliziert dass auch $y(x - 1) = x(y - 1)$. Sind nun x, y, z derart, dass $x(y - 1) = y(x - 1)$ und $y(z - 1) = z(y - 1)$. Dann ist $xy(z - 1) = x(y - 1)z = (x - 1)yz$, und somit durch Kürzen mit y erhalten wir auch $x(z - 1) = z(x - 1)$. Also hält auch transitivität, und die Relation ist eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 2: Wir betrachten die folgende Relation auf der Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2) \iff n_1 + m_2 = n_2 + m_1.$$

a) (2 P.) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) (2 P.) Enthält jede Äquivalenzklasse ein Element der Art $(n, 1)$?

c) (3 P.) Konstruieren Sie eine Bijektion von der Menge $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\sim$ der Äquivalenzklassen nach $\mathbb{Z}$. Welche Äquivalenzklasse haben Sie auf $0 \in \mathbb{Z}$ abgebildet?

Lösung:

a) $(n_1, n_2) \sim (n_1, n_2)$, denn $n_1+n_2 = n_1+n_2$. Also ist $\sim$ reflexiv. Weiterhin, wenn $n_1+m_2 = n_2+m_1$, dann ist $m_1+n_2 = n_1+m_2$, und daher ist es auch symmetrisch. Angenommen, nun, dass $(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$ und $(m_1, m_2) \sim (k_1, k_2)$. Wir überlegen uns ob dann $n_1+k_2 = n_2+k_1$. Zu Hilfe können wir gebrauchen dass $n_1 + m_2 = n_2 + m_1 \Leftrightarrow n_1 - n_2 = m_1 - m_2$.

$$\begin{aligned} n_1 + k_2 &= n_1 + k_2 + m_2 - m_2 \\ &= (n_1 + m_2) + k_2 - m_2 \\ &= (n_2 + m_1) + k_2 - m_2 \\ &= n_2 + k_2 + (m_1 - m_2) \\ &= n_2 + k_2 + (k_1 - k_2) \\ &= n_2 + k_1 + k_2 - k_2 \\ &= n_2 + k_1 \end{aligned}$$

und somit haben wir gezeigt dass $n_1 + k_2 = n_2 + k_1$, und somit dass $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$. Daher ist $\sim$ auch transitiv, und somit eine Äquivalenzrelation.

b) Ist (n_1, n_2) in eine Äquivalenzklasse, so ist $n_1 - n_2 = (n_1 - n_2 + 1) - 1$, und somit ist $(n_1, n_2) \sim (n_1 - n_2 + 1, 1)$. Dieses Ausdruck, wiederum, ist nur dann definiert, wenn $n_1 > n_2 - 1$ ist. Also hat zum Beispiel $(1, 5)$ keine äquivalente Element der Art $(n, 1)$.

c) Wir haben schon in a) gesehen, dass für alle Elemente (n_1, n_2) einer bestimmten Äquivalenzklasse, die Ausdruck $n_1 - n_2$ konstant bleibt. Weiterhin können wir alle werte in $\mathbb{Z}$ als solche Differenzen erhalten. Also werden wir schauen, ob $(n_1, n_2) \mapsto n_1 - n_2$ tatsächlich eine Bijektion ist.

Elemente der Form $(k, 0)$ und $(0, k)$ formen eine vollständige Menge von Repräsentanten für die Äquivalenzklassen, denn $(k, 0) \sim (l, 0)$ impliziert $k + 0 = l + 0$ und somit $k = l$. Gleich gilt wenn $(0, k) \sim (0, l)$ dann ist $k = k + 0 = l + 0 = l$. Schliesslich ist $(k, 0) \not\sim (0, l)$ wenn k oder l nicht null sind, denn dann wäre $k + l = 0$, was für nicht-negativen Zahlen nicht geht.

Surjektivität folgt daraus, dass jedes $k \geq 0$ als $(k, 0)$ und jedes $k < 0$ als $(0, k)$ dargestellt werden kann. Die Überlegungen oben zeigen, dass tatsächlich mindestens eine Äquivalenzklasse für jedes solches Zahl auftaucht.

Injektivität fordert, dass wenn immer (n_1, n_2) und (m_1, m_2) die gleiche Zahl bestimmen, dann sind sie auch äquivalent. Aber wenn die beide die gleiche Zahl bestimmen, dann ist $n_1 - n_2 = m_1 - m_2$, und dann auch $n_1 + m_2 = n_2 + m_1$, und somit die beide Elemente auch äquivalent.

0 ist dargestellt durch die Äquivalenzklasse (n, n), für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3: Die lexikographische Ordnung $\leq_{\text{lex}}$ auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ wird wie folgt definiert:

Es ist $(a, b) \leq_{\text{lex}} (c, d)$ genau dann, wenn *entweder* $a < c$ gilt, *oder* es ist $a = c$ und $b \leq d$.

Zum Beispiel gilt $(1, 2) \leq_{\text{lex}} (1, 4) \leq_{\text{lex}} (2, 0)$.

a) (3 P.) Zeigen Sie, dass $\leq_{\text{lex}}$ eine Ordnung auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ist.

b) Zeigen Sie, dass jede nichtleere Teilmenge T von $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ein kleinstes Element bezüglich $\leq_{\text{lex}}$ hat. Anders gesagt: Selbst für unendliche Teilmengen T gibt es ein $(a, b) \in T$ derart, dass $(a, b) \leq_{\text{lex}} (c, d)$ gilt für alle $(c, d) \in T$. *Hinweis*: Hat nicht jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}_0$ ein kleinstes Element?

Lösung:

a) Es ist reflexiv, denn für (a, b) gilt dass $a = a$ und $b \leq b$. Es ist antisymmetrisch, denn für $(a, b) \leq_{\text{lex}} (c, d)$ gilt entweder $a < c$ und dann *nicht* $c < a$, oder es gilt $b \leq d$ und dann *nicht* $d \leq b$. Es ist transitiv, denn ist $(a, b) \leq_{\text{lex}} (c, d)$ und $(c, d) \leq_{\text{lex}} (e, f)$, dann können wir folgende Fälle unterscheiden:

$a < c$ Dann ist $a < e$, und somit alles OK.

$c < e$ Dann ist $a < e$, und somit alles OK.

$a = e$ Dann ist $b \leq d \leq f$ und somit $b \leq f$ und alles OK.

b) Ist $T \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, so können wir T_0 setzen für die Menge alle erste Koordinate. Dann ist $T_0 \subseteq \mathbb{N}_0$, und hat somit eine kleinste Element a. Alle Paare (m, n) mit $m > a$ sind somit sowieso in diese Ordnung $\geq_{\text{lex}} (a, k)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Und in die Menge alle Paare der Form (a, k) gibt es ein kleinste k das vorkommt. Dieses (a, k) hat die Eigenschaft, dass es kleiner ist als alle andere Paare der Form (a, b), und auf jeden Fall kleiner als alle Paare der Form (n, m).

Aufgabe 4: Kritisieren Sie die folgenden Überlegungen.

Es ist überflüssig, dass man extra verlangt, dass Äquivalenzrelationen reflexiv sein müssen. Man sieht nämlich leicht, dass jede symmetrische, transitive Relation auch reflexiv ist: denn aus $x \mathrel{R} y$ folgt $y \mathrel{R} x$ wegen Symmetrie; und da $x \mathrel{R} y$ und $y \mathrel{R} x$ gelten, folgt $x \mathrel{R} x$ wegen Transitivität.

Lösung: Wenn nicht reflexivität verlangt wird, dann ist auf keinem Fall gewährleistet, dass $x \mathrel{R} x$ dafür hält. Zum Beispiel können wir die Relation auf $\{1, 2, 3, 4\}$ nehmen, die von $1 \mathrel{R} 2$, $2 \mathrel{R} 1$, $1 \mathrel{R} 3, 3 \mathrel{R} 1$, $2 \mathrel{R} 3$, $3 \mathrel{R} 2$, $1 \mathrel{R} 1$, $2 \mathrel{R} 2$, $3 \mathrel{R} 3$ gegeben wird. Hier ist transitivität und symmetrie beide vorhanden, aber $4 \mathrel{R} 4$ hält trotzdem nicht.