Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Wintersemester 2006/07 Übungsblatt 3

Abgabe: **Mi 01.11.** in der Vorlesung. Ab kommende Woche wird *mittwochs* eingesammelt.

Aufgabe 1: Ist die Relation R eine Äquivalenzrelation auf der Menge X? Begründen Sie Ihre Antworten.

a) (2 P.) $X = \mathbb{Z}$; $x \, R \, y$ genau dann, wenn $|y - x| \leq 3$.

b) (2 P.) $X = \mathbb{Q}$; $x \, R \, y$ genau dann, wenn $y - x$ eine ganze Zahl ist.

c) (2 P.) $X = \mathbb{R}$; $x \, R \, y$ genau dann, wenn $\frac{\sin(x)\cos(x^2)}{x^4+5} = \frac{\sin(y)\cos(y^2)}{y^4+5}$ gilt.

d) $X = \mathbb{N}$; $x \, R \, y$ genau dann, wenn weder $x = 2$ noch $y = 2$ gilt.

e) $X = \mathbb{Z}$; $x \, R \, y$ genau dann, wenn $x(y-1) = y(x-1)$ gilt.

Aufgabe 2: Wir betrachten die folgende Relation auf der Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2) \iff n_1 + m_2 = n_2 + m_1.$$

a) (2 P.) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) (2 P.) Enthält jede Äquivalenzklasse ein Element der Art $(n, 1)$?

c) (3 P.) Konstruieren Sie eine Bijektion von der Menge $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$ der Äquivalenzklassen nach $\mathbb{Z}$. Welche Äquivalenzklasse haben Sie auf $0 \in \mathbb{Z}$ abgebildet?

Aufgabe 3: Die lexikographische Ordnung $\leq_{\text{lex}}$ auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ wird wie folgt definiert:

> Es ist $(a, b) \leq_{\text{lex}} (c, d)$ genau dann, wenn *entweder* $a < c$ gilt, *oder* es ist $a = c$ und $b \leq d$.

Zum Beispiel gilt $(1, 2) \leq_{\text{lex}} (1, 4) \leq_{\text{lex}} (2, 0)$.

a) (3 P.) Zeigen Sie, dass $\leq_{\text{lex}}$ eine Ordnung auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ist.

b) Zeigen Sie, dass jede nichtleere Teilmenge T von $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ein kleinstes Element bezüglich $\leq_{\text{lex}}$ hat. Anders gesagt: Selbst für unendliche Teilmengen T gibt es ein $(a, b) \in T$ derart, dass $(a, b) \leq_{\text{lex}} (c, d)$ gilt für alle $(c, d) \in T$. *Hinweis*: Hat nicht jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}_0$ ein kleinstes Element?

Aufgabe 4: Kritisieren Sie die folgenden Überlegungen.

> Es ist überflüssig, dass man extra verlangt, dass Äquivalenzrelationen reflexiv sein müssen. Man sieht nämlich leicht, dass jede symmetrische, transitive Relation auch reflexiv ist: denn aus $x \, R \, y$ folgt $y \, R \, x$ wegen Symmetrie; und da $x \, R \, y$ und $y \, R \, x$ gelten, folgt $x \, R \, x$ wegen Transitivität.

Erreichbare Punktzahl: 16