Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
M.Sc. Mikael Johansson

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Wintersemester 06/07 — Lösungen zu Übungsblatt 2

Aufgabe 1: Welche der folgenden Gleichungen sind für alle Mengen A, B und C richtig, und welche sind im allgemeinen falsch? Begründen Sie in jedem Fall Ihre Antwort mit einem Beweis bzw. mit einem Gegenbeispiel.

a) (2 P.) $(A \cup B) - B = A$

b) (2 P.) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

c) (2 P.) $(A \cap B) \cup C = (A \cup B) \cap (B \cup C)$

d) $(A - B) \cap C = (A \cap C) - (B \cap C)$.

e) $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$

Lösung:

a) Zum Beispiel mit $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $(A \cup B) - B = \{4\}$.

b) Ist $x \in (A \cup B) - C$ so ist $x \in A$ oder $x \in B$ und auch dazu $x \notin C$. Angenommen $x \in A$. Dann $x \in A - C$, und so $x \in (A - C) \cup (B - C)$. Dabei haben wir aber die Fall $x \in B$ noch nicht behandelt. Liegt $x \in B$, so ist $x \in B - C$ und damit ist $x \in (A - c) \cup (B - C)$. Also ist $(A \cup B) - C \subseteq (A - C) \cup (B - C)$.

   Andererseits, liegt $x \in (A - C) \cup (B - C)$ so liegt x entweder in $A - C$ oder in $B - C$. Liegt $x \in A - C$, so ist $x \in A$ und $x \notin C$. Dann, aber, ist $x \in A \cup B$ und $x \notin C$ und damit ist $x \in (A \cup B) - C$. Gleich können wir mit $x \in B - C$ machen, und daher ist $(A \cup B) - C \supseteq (A - C) \cup (B - C)$

   Aus diese beide Inklusionen folgt dann Gleichheit der Mengen.

c) Zum Beispiel mit $A = \emptyset$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{3, 4\}$: $(A \cap B) \cup C = C$, aber $(A \cup B) \cap (B \cup C) = B$.

d) Liegt x in $(A - B) \cap C$ so liegt $x \in A - B$ und gleichzeitig $x \in C$. Also ist $x \in A$, $x \notin B$ und $x \in C$. Dann aber, ist $x \in A \cap C$ und $x \notin B$ und somit ist $x \in A \cap C$ und $x \notin B \cap C$. Und daher ist $x \in (A \cap C) - (B \cap C)$, und somit ist $(A - B) \cap C \subseteq (A \cap C) - (B \cap C)$.

   Andererseits, ist $x \in (A \cap C) - (B \cap C)$ so ist $x \in A \cap C$ und $x \notin B \cap C$. Daher folgt $x \in A$, $x \in C$, $x \notin B$. Dann aber, ist $x \in A - B$ und gleichzeitig $x \in C$, so daraus folgt $x \in (A - B) \cap C$, und somit ist $(A - B) \cap C \supseteq (A \cap C) - (B \cap C)$. Aus der beiden Inklusionen folgt wieder Gleichheit der Mengen.

e) Zum Beispiel mit $A = \{1, 2\}$, $B = C = \{3, 4\}$ ist $(A \cup B) \cap C = C$ aber $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4\}$.

Aufgabe 2: Seien A und B Teilmengen von C. Zeigen Sie:

a) (2 P.) $\{K \in \mathscr{P}(C) \mid B \subseteq K\} \subseteq \{K \in \mathscr{P}(C) \mid A \subseteq K\} \quad \Rightarrow \quad A \subseteq B$.

b) (2 P.) $\{K \in \mathscr{P}(C) \mid B \subseteq K\} \cap \{K \in \mathscr{P}(C) \mid A \subseteq K\} = \{K \in \mathscr{P}(C) \mid A \cup B \subseteq K\}$.

Lösung:

a) Die Aussage ist dass, wenn jede Menge in $B' = \{K \in \mathscr{P}(C) \mid B \subseteq K\}$ auch in $A' = \{K \in \mathscr{P}(C) \mid A \subseteq K\}$ liegt, dann folgt auch $A \subseteq B$. Nun ist $B \subseteq B$, und so ist $B \in B'$. Dann ist aber $B \in A'$. Aber die Mengen in A' sind genau alle Mengen M, so dass $A \subseteq M$. $B \in A'$ sagt daher aus, dass $A \subseteq B$ gilt.

b) Die Aussage ist, dass wenn eine Menge M die Eigenschaften hat, dass $B \subseteq M$ und gleichzeitig $A \subseteq M$, dann ist auch $A \cup B \subseteq M$. Aber wenn alles in B in M liegt, und alles in A in M liegt, dann liegt auch alles, dass in entweder B oder A liegt, auch in M.

Aufgabe 3: (2 P.) Sei X die Menge $X = \{a, b\}$ und Y die Menge $Y = \{p, q, r\}$. Beschreiben Sie alle Abbildungen $f\colon X \to Y$. Wieviele sind injektiv? Wieviele sind surjektiv?

Lösung:

$f(a)$	$f(b)$	Eigenschaften
p	p	
p	q	Injektiv
p	r	Injektiv
q	p	Injektiv
q	q	
q	r	Injektiv
r	p	Injektiv
r	q	Injektiv
r	r	

Aufgabe 4: Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Abbildungen. Weisen Sie folgende Aussagen aus der Vorlesung nach.

a) (2 P.) Ist die Verknüpfung $g \circ f$ injektiv, so muss f injektiv sein.

b) (2 P.) Ist die Verknüpfung $g \circ f$ surjektiv, so muss g surjektiv sein.

c) Die Abbildung $g \circ f$ kann bijektiv sein, ohne dass f, g bijektiv sein müssen (Beispiel!)

Lösung:

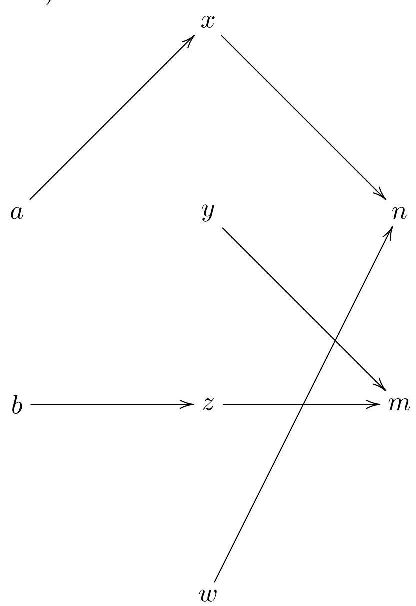
a) Ist f nicht injektiv, dann gibt es $x_1 \neq x_2 \in X$ so dass $f(x_1) = f(x_2)$. Dann, aber, ist $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, und so ist auch $g \circ f$ nicht injektiv.

   Alternativ: Sei $f(x_1) = f(x_2)$. Dann ist auch $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, und dann wegen der Injektivität von $g \circ f$ ist $x_1 = x_2$.

b) Ist g nicht surjektiv, dann gibt es ein z das nicht von g getroffen wird. Dann, aber wird dieses z auch nicht von $g \circ f$ getroffen, und so ist $g \circ f$ auch nicht surjektiv.

Alternativ: Sei $z \in Z$ beliebig. Da $g \circ f$ surjektiv ist, gibt es ein $x \in X$ mit $g \circ f(x) = z$, d.h. $g(f(x)) = z$. Mit $y = f(x)$ gibt es also ein $y \in Y$ mit $g(y) = z$, weshalb g surjektiv ist.

c) Siehe diesem Bild



mit $X = \{a, b\}$, $Y = \{x, y, z, w\}$, $Z = \{n, m\}$ für ein Beispiel. f ist nicht surjektiv, daher auch nicht bijektiv. g ist nicht injektiv, und daher nicht bijektiv.

Erreichbare Punktzahl: 16