Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
M.Sc. Mikael Johansson

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Wintersemester 06/07 — Lösungen zu Übungsblatt 1

Aufgabe 1: Vor Sokrates sitzen drei Götter

$$A \qquad B \qquad C$$

von denen einer der immer lügende Gott der Lüge, einer der stets die Wahrheit sagende Gott der Wahrheit und einer der hin und wieder lügende Gott der Diplomatie ist. Sokrates fragt A „Wer sitzt neben dir“ und erhält als Antwort „Der Gott der Wahrheit“, er fragt B „Wer bist du“ und erhält als Antwort „Der Gott der Diplomatie“, und er fragt C „Wer sitzt neben dir“ und erhält als Antwort „Der Gott der Lüge“. Wer sind A, B und C?

Lösung: Wir haben drei Aussagen:
A: „B ist der Gott der Wahrheit“
B: „B ist der Gott der Diplomatie“
C: „B ist der Gott der Lüge“
Wenn A der Gott der Wahrheit wäre, dann hätte er gerade gelogen. Also ist A nicht der Gott der Wahrheit. Wenn B der Gott der Wahrheit wäre, dann hätte er auch gelogen. Also ist auch B nicht der Gott der Wahrheit.
Daher ist C der Gott der Wahrheit, und somit B der Gott der Lüge. Übrig bleibt für A der Gott der Diplomatie, der gerade gelogen hat.

Aufgabe 2: Stellen Sie die Wahrheitstafel für die drei folgenden Aussagen auf. Folgern Sie, dass diese drei Aussagen äquivalent sind.

$$P \Rightarrow Q \qquad\qquad \neg Q \Rightarrow \neg P \qquad\qquad (P \wedge \neg Q) \Rightarrow F$$

Lösung:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

P	Q	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
W	W	F	F	W
W	F	W	F	F
F	W	F	W	W
F	F	W	W	W

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$(P \wedge \neg Q) \Rightarrow F$
W	W	F	F	W
W	F	W	W	F
F	W	F	F	W
F	F	W	F	W

Da die Wahrheitswerte in den Tafeln alle äquivalent sind, sind auch die Aussagen äquivalent.

Aufgabe 3: Sei X eine Menge. Häufig sieht man Aussagen wie $\forall x \in X\ P(x)$, die das gleiche wie die Aussage $\forall x\ (x \in X) \Rightarrow P(x)$ bedeutet. Außerdem hat $\exists x \in X\ P(x)$ die gleiche Bedeutung wie $\exists x\ (x \in X) \wedge P(x)$.

Sind die folgenden Aufgaben wahr oder falsch?

a) $\forall n \in \mathbb{Z}\ \exists m \in \mathbb{Z} \quad m > n$

b) $\exists n \in \mathbb{Z}\ \forall m \in \mathbb{Z} \quad m > n$

c) $\exists n \in \mathbb{Z}\ \exists m \in \mathbb{Z} \quad m > n$

Lösung:

a) Wahr. $m = n + 1$ ist ein Wahl das Funktioniert.

b) Falsch. Für jedes gewählte n gilt dass $m = n - 1$ nicht die Bedingung erfüllt.

c) Wahr. Wenn für alle n gilt dass $\exists m \in \mathbb{Z} \quad m > n$, dann gilt es ganz bestimmt für ein bestimmten n.

Aufgabe 4: Verneinen Sie die folgenden Aussagen:

a) $P \vee \neg Q$

b) $P \Leftrightarrow \neg Q$

c) $\forall x \in \mathbb{Z} \quad f(x) = 7$

d) $\exists y\ \forall x \quad (P(x) \wedge Q(y)) \Rightarrow R(x, y)$

Lösung:

a) $\neg P \wedge Q$

b) $P \Leftrightarrow Q$

c) $\exists x \in \mathbb{Z} \quad f(x) \neq 7$

d) $\forall y\ \exists x \quad P(x) \wedge Q(y) \wedge \neg R(x, y)$

Aufgabe 5: Von den folgenden zehn Aussagen sind jeweils 2 äquivalent. Welche? Untersuchen Sie diese 5 Aussagen auf Implikationen unter der Voraussetzung, daß es tatsächlich sowohl Mathematiker als auch Probleme gibt.

a) Es gibt Mathematiker, die nicht alle Probleme lösen können.

b) Jeder Mathematiker hat ein Problem, das er nicht lösen kann.

c) Es gibt Probleme, die kein Mathematiker lösen kann.

d) Zu jedem Problem findet sich ein Mathematiker, der es nicht lösen kann.

e) Es gibt kein Problem, das alle Mathematiker lösen können.

f) Es gibt keinen Mathematiker, der alle Probleme lösen kann.

g) Nicht jeder Mathematiker kann überhaupt ein Problem lösen.

h) Es gibt ein Problem, das für wenigtstens einen Mathematiker unlösbar ist.

i) Nicht jedes Problem kann überhaupt von einem Mathematiker gelöst werden.

j) Es gibt Mathematiker, die kein Problem lösen können.

Lösung: Wir schreiben $L(M, P)$ für „M kann P lösen“. Weiterhin nehmen wir an, dass hier alle Vorkommen von M „Mathematiker“ und alle Vorkommen von P „Problem“ bedeuten.
a): $\exists M \neg \forall P\colon L(M, P) \Leftrightarrow$ h): $\exists P \exists M\colon \neg L(M, P)$
b): $\forall M \exists P\colon \neg L(M, P) \Leftrightarrow$ f): $\neg \exists M \forall P\colon L(M, P)$
c): $\exists P \neg \exists M\colon L(M, P) \Leftrightarrow$ i): $\neg \forall P \exists M\colon L(M, P) \Leftrightarrow \exists P \forall M\colon \neg L(M, P)$
d): $\forall P \exists M\colon \neg L(M, P) \Leftrightarrow$ e): $\neg \exists P \forall M\colon L(M, P)$
g): $\neg \forall M \exists P\colon L(M, P) \Leftrightarrow$ j): $\exists M \forall P\colon \neg L(M, P)$
Nun können wir grundsätzlich eine Aussage mit $\forall x\colon P(x)$ in eine Aussage $\exists x\colon P(x)$ spezialisieren, jedoch nicht aus $\exists x\colon P(x)$ folgern dass $\forall x\colon P(x)$. Weiterhin können wir Quantifikatoren gleicher Art mit einander austauschen, und so ist $\exists P \exists M \neg L(M, P)$ äquivalent zu $\exists M \exists P \neg L(M, P)$. Daher werden hier alle Aussagen
$\forall M \exists P\colon \neg L(M, P)$
$\exists P \forall M\colon \neg L(M, P)$
$\forall P \exists M\colon \neg L(M, P)$
$\exists M \forall P\colon \neg L(M, P)$
dem einen $\exists P \exists M\colon \neg L(M, P)$ implizieren, insofern dass keine der $\forall x$ tatsächlich auf eine leere Domäne operiert.

Aufgabe 6: Ist die Aussage

$$\forall x \in \emptyset \quad 1 = 0$$

wahr oder falsch? Warum wurde in Aufgabe vorausgesetzt, dass es tatsächlich Mathematiker und Probleme gibt?

Lösung: Wahr, denn die Aussage wird für keinen x tatsächlich getestet. Für alle $x \in \emptyset$, von den es keinen gibt, gilt die Aussage. Daher, damit nicht falsche Aussagen per Einschränkungen in der Domäne trivialerweise wahr werden, muss die Voraussetzung auch da sein.