

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Wintersemester 2006/07

Übungsblatt 1

Die Übungsgruppen finden erstmals in der zweiten Semesterwoche statt. Diese Übungsreihe soll in der ersten Übungsstunde besprochen werden. Sie wird nicht benotet.

Aufgabe 1: Vor Sokrates sitzen drei Götter

$A \quad B \quad C$

von denen einer der immer lügende Gott der Lüge, einer der stets die Wahrheit sagende Gott der Wahrheit und einer der hin und wieder lügende Gott der Diplomatie ist. Sokrates fragt A „Wer sitzt neben dir“ und erhält als Antwort „Der Gott der Wahrheit“, er fragt B „Wer bist du“ und erhält als Antwort „Der Gott der Diplomatie“, und er fragt C „Wer sitzt neben dir“ und erhält als Antwort „Der Gott der Lüge“. Wer sind A , B und C ?

Aufgabe 2: Stellen Sie die Wahrheitstafel für die drei folgenden Aussagen auf. Folgern Sie, dass diese drei Aussagen äquivalent sind.

$$P \Rightarrow Q \qquad \neg Q \Rightarrow \neg P \qquad (P \wedge \neg Q) \Rightarrow F$$

Aufgabe 3: Sei X eine Menge. Häufig sieht man Aussagen wie $\forall x \in X P(x)$, die das gleiche wie die Aussage $\forall x (x \in X) \Rightarrow P(x)$ bedeutet. Außerdem hat $\exists x \in X P(x)$ die gleiche Bedeutung wie $\exists x (x \in X) \wedge P(x)$.

Sind die folgenden Aufgaben wahr oder falsch?

- a) $\forall n \in \mathbb{Z} \exists m \in \mathbb{Z} \quad m > n$
- b) $\exists n \in \mathbb{Z} \forall m \in \mathbb{Z} \quad m > n$
- c) $\exists n \in \mathbb{Z} \exists m \in \mathbb{Z} \quad m > n$

Aufgabe 4: Verneinen Sie die folgenden Aussagen:

- a) $P \vee \neg Q$
- b) $P \Leftrightarrow \neg Q$
- c) $\forall x \in \mathbb{Z} \quad f(x) = 7$
- d) $\exists y \forall x \quad (P(x) \wedge Q(y)) \Rightarrow R(x, y)$

Aufgabe 5: Von den folgenden zehn Aussagen sind jeweils 2 äquivalent. Welche? Untersuchen Sie diese 5 Aussagen auf Implikationen unter der Voraussetzung, daß es tatsächlich sowohl Mathematiker als auch Probleme gibt.

- a) Es gibt Mathematiker, die nicht alle Probleme lösen können.
- b) Jeder Mathematiker hat ein Problem, das er nicht lösen kann.
- c) Es gibt Probleme, die kein Mathematiker lösen kann.
- d) Zu jedem Problem findet sich ein Mathematiker, der es nicht lösen kann.
- e) Es gibt kein Problem, das alle Mathematiker lösen können.
- f) Es gibt keinen Mathematiker, der alle Probleme lösen kann.
- g) Nicht jeder Mathematiker kann überhaupt ein Problem lösen.
- h) Es gibt ein Problem, das für wenigstens einen Mathematiker unlösbar ist.
- i) Nicht jedes Problem kann überhaupt von einem Mathematiker gelöst werden.
- j) Es gibt Mathematiker, die kein Problem lösen können.

Aufgabe 6: Ist die Aussage

$$\forall x \in \emptyset \quad 1 = 0$$

wahr oder falsch? Warum wurde in Aufgabe 5 vorausgesetzt, dass es tatsächlich Mathematiker und Probleme gibt?