Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Wintersemester 2006/07 — Wiederholungsklausur 26.03.2007

Name: **Matrikel-Nr.:**

Studiengang:

Dauer: $2\frac{1}{2}$ Stunden Diese Klausur besteht aus sieben Aufgaben. Wer 13 Punkte schafft, hat bestanden. Keine Hilfsmittel.
Bitte fangen Sie jede Aufgabe auf ein neues Blatt an. Bitte schreiben Sie Name und Matrikel-Nr. auf jedes Blatt. Bitte geben Sie diesen Klausurbogen als Deckblatt ab. Die Klausur wird ins Netz gestellt.

Aufgabe 1: (3 P.) Wann heißt ein System von Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ linear unabhängig?

Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum $C^0(\mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Seien $f, g, h \in V$ die Funktionen $f(x) = \cos^2(x)$, $g(x) = \sin^2(x)$ und $h(x) = 2$. Ist das System $f(x), g(x), h(x)$ linear unabhängig in V?

Aufgabe 2: (4 P.) Von den folgenden drei Aussagen sind zwei wahr und eine falsch. Sagen Sie, welche Aussage falsch ist, und geben Sie ein Gegenbeispiel, das dies belegt, bzw. geben Sie ggf. in c) die richtige Antwort.

a) Seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume und $f\colon W \to V$ eine lineare Abbildung. Dann ist $\dim \mathrm{Bild}(f) + \dim \mathrm{Kern}(f) = \dim(V)$.

b) Für jede Matrix $A \in M(m \times n, k)$ gilt: die Dimension des Spaltenraums ist mindestens so groß wie die Dimension des Zeilenraums.

c) Für die Vektoren $v = (1 + i, 2 - i, 3i)$ und $w = (1, 3 + 2i, i)$ des $\mathbb{C}^3$ gilt $\langle w, v\rangle = 8 + 6i$ (Standardskalarprodukt).

Bitte wenden

1	2	3	4	5	6	7	$\sum$

Aufgabe 3: (5 P.) Wie lautet die Definition des Begriffs lineare Abbildung? Was besagt die Dimensionsformel für lineare Abbildungen?

Angenommen, f, g sind zwei lineare Abbildungen von $\mathbb{C}^3$ nach $\mathbb{C}^2$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $h\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ gegeben durch $h(v) = f(v) - g(v)$ linear ist. Folgern Sie, dass es mindestens einen Vektor $0 \neq v \in \mathbb{C}^3$ gibt derart, dass $f(v) = g(v)$ gilt. Kann man außerdem verlangen, dass $f(v) \neq 0$ gilt?

Aufgabe 4: (5 P.) Sei $A \in M(m \times n, k)$ eine Matrix. Erklären Sie die Begriffe Zeilenraum, Zeilenrang, Spaltenraum und Spaltenrang. In welcher Beziehung zueinander stehen Spalten- und Zeilenrang? Wie benutzt man das Gaußsche Eliminationsverfahren, um den Zeilenrang zu ermitteln?

Sei $A \in M_4(\mathbb{R})$ die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Beachten Sie, dass die dritte Spalte die Summe der zweiten und vierten Spalten ist. Schreiben Sie einen Vektor $v \neq 0$ hin, der $A \cdot v = 0$ erfüllt. Berechnen Sie den Rang der Matrix.

Aufgabe 5: (5 P.) Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei endlich dimensionalen Vektorräume. Beschreiben Sie, wie man f eine Matrix zuordnet.

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x,y) = (y - x, x + 2y, x + 3y)$. Konstruieren Sie die Matrix von f bezüglich den Basen $(1,3)$, $(2,-1)$ von $\mathbb{R}^2$ sowie $(-1,0,1)$, $(-1,0,0)$, $(0,1,1)$ von $\mathbb{R}^3$. Ist f surjektiv?

Aufgabe 6: (5 P.) Eine der Eigenschaften der Determinante betrifft Matrizen in einer bestimmten Blockgestalt: wie lautet diese Regel? Wie erkennt man anhand der Determinante einer Matrix, ob die Spalten linear unabhängig sind?

Die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ erfüllt $f(v) = v + w$ und $f(w) = v + 2w$ für $v = (0,1,1,0,1)$ und $w = (1,1,0,2,-1)$. Zeigen Sie, dass es eine Basis B des $\mathbb{R}^5$ gibt derart, dass die Matrix von f die Blockgestalt ${}_B\mathrm{M}_B(f) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ hat, mit $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ und $D \in M_3(\mathbb{R})$.

Wie ist die Determinante $\det(f)$ des Endomorphismus f definiert? Zeigen Sie, es ist $\det(f) = \det(D)$.

Aufgabe 7: (5 P.) Wie lautet der Satz über die Hauptachsentransformation (euklidischer Fall)? Geben Sie eine orthogonale 2×2-Matrix an, die nicht in $SO(2)$ liegt.

Finden Sie eine Matrix $T \in SO(2)$ derart, dass die Matrix $T^{-1} \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) T$ Diagonalgestalt hat.

Erreichbare Punktzahl: 32