LAAG1 - Muster-Klausur 03
FSU Jena - WS 06/07
- Lösungen -

Stilianos Louca

February 12, 2007

Aufgabe 1

a) Ein System von Vektoren $v_1, ..., v_n$ ist genau dann linear unabhängig wenn gilt:

$$\left(Sind\ \lambda_1, ..., \lambda_2 \in k : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \right) \Rightarrow (\lambda_i = 0\ \forall i \in \{1, ..., n\})$$

b) Die Vektoren $v_1 := (1,1), v_2 := (2,-1), v_3 := (3,7) \in \mathbb{C}$ sind nicht L.U. über $\mathbb{R}$ denn, fassen wir sie als Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ auf dann:

$$Sei\ A := \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}.$$

$$A \stackrel{Gauss}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang(A) = 2\ \Rightarrow\ v_1, ..., v_3\ Lin.\ Abhängig.$$

Aufgabe 2

Aussage a) ist Falsch. Gegenbeispiel:

$$v_1 := (1,0) =: v_2, w_1 := (1,0), w_2 := (0,1).\ w_1, w_2 : Basis\ von\ \mathbb{R}^2$$

$$Sei\ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : f(v_1) = w_1 \wedge f(v_2) = w_2$$

$$\Rightarrow w_2 = w_1\ Widerspruch$$

Aufgabe 3

a) Sind V, W zwei k-Vektorräume, dann ist eine lineare Abbildung $f : V \to W$ eine Abbildung die folgendes erfüllt:

$$\forall\ \lambda, \mu \in k,\ \forall\ v, u \in V\ \ :\ \ f(\lambda v + \mu u) = \lambda f(v) + \mu f(u)$$

b)

$$Sei\ v \in V \backslash U,\ \ u \in U.$$

$$f(v+u) = f(v) + f(u) = 0 + f(u)$$

$$Ist\ (v+u) \in U?\ Nein,\ \ denn: Wäre\ (v+u) \in U \to (v+u-u) = v \in U\ Widerspruch$$

$$\Rightarrow v + u \notin U \Rightarrow f(v+u) = f(u) = 0$$

$$\Rightarrow \forall v \in V\ \ :\ \ f(v) = 0. \quad \square$$

Aufgabe 4

a) Ist V ein endlich dimensionaler k-Vektorraum und $b_1, ..., b_r \in V$ linear unabhängige Vektoren. Dann gibt es Vektoren $b_{r+1}, ..., b_n \in V$ so dass $b_1, ..., b_r, b_{r+1}, ..., b_n$ eine Basis von V bilden.

b) Sei $B : b_1, ..., b_r$ eine Basis von U, $C : b_1, ..., b_r, ..., b_n$ eine fortgesetzte Basis von V. Satz der linearen Fortsetzung:

$\exists\ f \in L(V,V) : f(b_i) = b_i \in U\ \forall\ i \in \{1, ..., r\}\ \ \wedge\ \ f(b_i) = 0 \in U\ \forall i \in \{r+1, ..., n\}$

$$\Rightarrow \forall\ u := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \in V : f(u) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(b_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i b_i \in U \wedge\ \ (= u\ falls\ u \in U)\ \ \to f \in L(V,U) \quad \square$$

Aufgabe 5

a) Sei $A \in M(m \times n, k)$ die gesuchte Matrix, wobei $n = dim(V),\ \ m = dim(W)$. Vorraussetzungen: Eine Basis $B : b_1, b_2, ..., b_n$ von V und eine Basis $C : c_1, c_2, ..., c_m$ von W. Dann ist A gegeben durch:

$$i - te\ Spalte\ von\ A = A \cdot e_i = Koordinatenvektor\ von\ f(b_i)\ bezüglich\ C$$

Da $f(b_i)$ bekannt ist und auch dessen Koordinatenvektor für jedes i, ist auch A leicht zu konstruieren.

b)

$$b_1 := (1,2,3),\ \ b_3 := (0,1,2),\ \ c_1 := (1,1,1),\ \ c_3 := (0,1,1),\ \ u := (1,1,1) = b_1 - b_3$$

$$\Rightarrow\ \ u_k := (1,0,-1)\ \ :\ \ Koordinatenvektor\ von\ u.$$

$$A \cdot u_k = (2,0,-3)\ \ \Rightarrow f(u) = 2c_1 - 3c_3 = (2,-1,-1)$$

Aufgabe 6

a) Seien $A, D \in M_n(k)$ jeweils eine Blockmatrix und eine in oberer Dreiecksgestalt, d.h

$$A = \begin{pmatrix} B & ? \\ 0 & C \end{pmatrix}, bzw.\ \exists m < n \in \mathbb{N} : [(i > m \wedge j < m) \Rightarrow (A_{ij} = 0)]$$

$$D_{ij} = 0\ \forall\ j < i$$

Dann gilt:

$$\det(A) = \det(B) \cdot \det(C)\ \wedge\ \det(D) = \prod_{i=1}^{n} D_{ii}$$

b)

$$B := \begin{pmatrix} x-1 & -2 \\ 0 & x \end{pmatrix},\ C := \begin{pmatrix} x+3 & 2 \\ -2 & x-1 \end{pmatrix},\ D := \begin{pmatrix} x+3 & 2 & -9 \\ -2 & x-1 & -1 \\ 0 & 0 & x-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & ? \\ 0 & x-4 \end{pmatrix}$$

$$P_x(A) = \det(A - xE_n) = \det \begin{pmatrix} B & ? \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(B) \cdot \det(D) = \det(B) \cdot \det(C) \cdot (x-4) = x(x-1)(x-4)(x+1)^2$$

$$\Rightarrow\ 0, 1, 4, -1\ :\ Eigenwerte\ von\ A$$

Aufgabe 7

a) Ist $f : V \to V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus auf den endlich dimensionalen unitären Raum V, dann gibt es mindestens eine Othonormalbasis $B : b_1, ..., b_n$ von V die aus lauter Eigenvektoren von f besteht (also hat f auch mindestens einen Eigenwert) und alle Eigenwerte von f sind reel.

b)

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 2+i \\ 2-i & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_x(A) = \det(A - xE_2) = (x-5)(x+1) \Rightarrow 5, -1\ Eigenwerte$$

$$E_5(A) = Kern(A - 4E_2) = \{((2+i) \cdot t, t) \mid t \in \mathbb{C}\},\ v_1 := \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2+i, 1) \in E_5(A)\ \rightarrow\ \|v_1\| = 1$$

$$E_{-1}(A) = Kern(A + E_2) = \{(-\frac{(2+i)}{5} \cdot t, t) \mid t \in \mathbb{C}\},\ v_2 := \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot (-(2+i), 5) \in E_{-1}(A)\ \rightarrow \|v_2\| = 1$$

$$Da\ A\ hermitesch \Rightarrow L_A : Selbstadjungierter\ Endomorphismus \Rightarrow v_1 \perp v_2 \wedge v_1, v_2\ Linear\ Unabhängig$$

$$\Rightarrow v_1, v_2 : Orthonormalbasis\ von\ \mathbb{C}$$