Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Wintersemester 2006/07 — Muster-Klausur Nr. 3

Diese Musterklausur wurde zur Klausurvorbereitung erstellt. Keine Hilfsmittel. Rechnen Sie nicht damit, alle Aufgaben in der vorgesehenen Zeit zu lösen.

Wenn nichts anderes gesagt wird, ist k ein Körper und V ein k-Vektorraum.

Aufgabe 1: (3 P.) Wann heißt ein System von Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ linear unabhängig?

Sind die komplexen Zahlen $1 + i$, $2 - i$ und $3 + 7i$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$?

Aufgabe 2: (4 P.) Von den folgenden drei Aussagen sind zwei wahr und eine falsch. Sagen Sie, welche Aussage falsch ist, und geben Sie ein Gegenbeispiel, das dies belegt.

a) Seien V, W zwei k-Vektorräume. Zu jedem System $v_1, \dots, v_n$ von Vektoren aus V und zu jeder Basis $w_1, \dots, w_n$ für W gibt es eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ für alle i.

b) Elementare Zeilenoperationen ändern den Zeilenraum einer Matrix nicht.

c) Sind zwei Zeilen einer Matrix $A \in M_n(k)$ gleich, so gilt $\det(A) = 0$.

Aufgabe 3: (4 P.) Was laut Definition ist eine lineare Abbildung? Angenommen, $f\colon V \to W$ ist eine lineare Abbildung, $U \subsetneq V$ ist ein echter Unterraum, und $f(v) = 0$ für alle $v \in V \setminus U$. Zeigen Sie, dass $f(v) = 0$ für *alle* $v \in V$.

Aufgabe 4: (4 P.) Wie lautet der Basisergänzungssatz? Wie lautet der Satz von der linearen Fortsetzung?

Sei V ein endlich dimensionaler k-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Zeigen Sie, dass es eine lineare Abbildung $f\colon V \to U$ gibt derart, dass $f(u) = u$ gilt für jedes $u \in U$.

Bitte wenden

Aufgabe 5: (6 P.) Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei endlich dimensionalen Vektorräume. Beschreiben Sie, wie man f eine Matrix zuordnet.

Sei B die Basis $(1,2,3)$, $(1,1,0)$, $(0,1,2)$ des $\mathbb{R}^3$. Sei C die Basis $(1,1,1)$, $(3,1,0)$, $(0,1,1)$ des $\mathbb{R}^3$. Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung, deren Matrix bezüglich dieser beiden Basen durch

$$_B\mathrm{M}_C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben wird. Berechnen Sie $f(1,1,1)$.

Aufgabe 6: (6 P.) Wie lauten die Regeln für die Determinante einer Blockmatrix und für die Determinante einer Matrix in oberer Dreiecksgestalt? Finden Sie alle Eigenwerte der folgenden Matrix $A \in M_5(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & e & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7: (5 P.) Wie lautet der Spektralsatz (unitärer Fall)?

Finden Sie eine Orthonormalbasis für $\mathbb{C}^2$, die aus Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 4 & 2+i \\ 2-i & 0 \end{pmatrix}$ besteht.

Erreichbare Punktzahl: 32