LAAG1 - Muster-Klausur 02
FSU Jena - WS 06/07
- Lösungen -

Stilianos Louca

February 12, 2007

Aufgabe 1

a) Ein System von Vektoren $v_1, ..., v_n$ ist genau dann linear unabhängig wenn gilt:

$$\left(Sind\ \lambda_1, ..., \lambda_2 \in k : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \right) \Rightarrow (\lambda_i = 0\ \forall i \in \{1, ..., n\})$$

b) Die Vektoren $v_1 := (1,1,2), v_2 := (1,-1,3), v_3 := (2,8,1)$ sind L.U. denn:

$$Sei\ A := \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}.$$

$$A \overset{Gauss}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang(A) = 2\ \Rightarrow\ v_1, ..., v_3\ Lin.\ Abh.$$

Aufgabe 2

Aussage 3 ist Falsch. Gegenbeispiel:

$$v_1 := (2,0), v_2 := (0,2).$$
$$v_1, v_2\ Eigenvektoren\ von\ Id : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\ \wedge\ v_1, v_2 : Basis\ von\ \mathbb{R}^2$$
$$Doch : v_1, v_2\ keine\ Orthonormalbasis.$$

Aufgabe 3

a)

$$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$$

b)

$$dim(U \cap W) = dim(U) + dim(W) - dim(U + W) = 9 - dim(U + W) \geq 2\ Da : dim(U + W) \leq dim(V) = 7$$

Aufgabe 4

a) Sei $f : V \to W$ eine Lineare Abbildung. Dann:

$$dim(Kern(f)) + dim(Bild(f)) = dim(V)$$

b)

$$Seien\ z_1, z_2, ..., z_n\ die\ Spalten\ von\ A.$$

$$Sei\ v \in k^m.\ Ist\ v \in Bild(L_A) \Leftrightarrow \exists u := (u_1, u_2, ..., u_n) \in k^n : L_A(u) = v$$

$$\Leftrightarrow A \cdot u = v \ \Leftrightarrow\ \sum_{i=1}^{n} u_i z_i = v \ \Leftrightarrow v \in spann\{z_1, z_2, ..., z_n\}$$

$$\Rightarrow Bild(L_A) = Spaltenraum(A)$$

$$\Rightarrow Rang(L_A) = dim(Bild(L_A)) = dim(spaltenraum(A)) = Spaltenrang.$$

Aufgabe 5

a) Sei $A \in M(m \times n, k)$ die gesuchte Matrix, wobei $n = dim(V), m = dim(W)$. Vorraussetzungen: Eine Basis $B : b_1, b_2, ..., b_n$ von V und eine Basis $C : c_1, c_2, ..., c_m$ von W. Dann ist A gegeben durch:

$$i - te\ Spalte\ von\ A = A \cdot e_i = Koordinatenvektor\ von\ f(b_i)\ bezüglich\ C$$

Da $f(b_i)$ bekannt ist und dessen Koordinatenvektor, ist auch A leicht zu konstruieren.

b) Sei $C : c_1, c_2, c_3$ die gesuchte Basis.

$$b_1 := (1, 2, 0), b_2 := (3, 0, 1), b_3 := (1, 1, -1).$$

$$\Rightarrow 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3 = c_1 \stackrel{!}{=} f(b_1) = (2, 5, 1)$$

$$Analog: \ c_2 \stackrel{!}{=} f(b_2) = (1, 3, -3)$$

$$c_1 + c_3 = (2, 5, 1) + c_3 \stackrel{!}{=} f(b_3) = (0, 3, 0) \Rightarrow c_3 = (-2, -2, -1)$$

Aufgabe 6

a) Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus des k-Vektorraums V. Sei $\lambda \in k$. k ist genau dann ein Eigenwert von f wenn gilt:

$$\exists\ 0 \neq v \in V : f(v) = \lambda \cdot v$$

b) Ist λ ein Eigenwert von $A \in M_n(k)$ dann gilt:

$$\exists\ 0 \neq v \in k^n : A \cdot v = \lambda \cdot v \Leftrightarrow (A - \lambda E_n) \cdot v = 0$$

$$\Leftrightarrow Nullraum(A - \lambda E_n) \neq \{0\} \Leftrightarrow Rang(A - \lambda E_n) < n \Leftrightarrow \det(A - \lambda E_n) = 0$$

c)

$$A - 3E_5 = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - 3E_5) = 0 \Rightarrow 3\ Eigenwert$$

Aufgabe 7

a) Ist $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine Symmetrische Matrix, so existiert eine Matrix $S \in SO(n)$ mit $S^{-1} \cdot A \cdot S$ =Diagonalmatrix, das heisst der Endomorphismus $L_A : k^n \to k^n$ ist diagonalisierbar.

b)

$$Sei\ B := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_x(B) = (x-5)(x+1) \Rightarrow\ \lambda_1 := (5),\ \lambda_2 := -1\ :\ Eigenwerte$$

$$E_{\lambda_1}(B) = Kern(B - \lambda_1 E_2) = Kern \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \{(t,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$$E_{\lambda_2}(B) = Kern(B - \lambda_2 E_2) = Kern \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \{(t,-t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$$\to v_1 := (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \in E_{\lambda_2}(B),\ v_2 := (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \in E_{\lambda_2}(B) : Eigenvektoren$$

$$Ausserdem:\ v_1, v_2\ Orthonormalbasis\ von\ \mathbb{R}^2\ da\ (v_1 \perp v_2) \wedge (\|v_1\| = \|v_2\| = 1)$$

$$\Rightarrow T := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in O(2).$$

$$Ausserdem:\ \det(T) = 1 \Rightarrow T \in SO(2)$$

$$T^{-1} \cdot B \cdot T = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$