Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Wintersemester 2006/07 — Muster-Klausur Nr. 2

Diese Musterklausur wurde zur Klausurvorbereitung erstellt. Keine Hilfsmittel. Rechnen Sie nicht damit, alle Aufgaben in der vorgesehenen Zeit zu lösen.

Wenn nichts anderes gesagt wird, ist k ein Körper und V ein k-Vektorraum.

Aufgabe 1: (3 P.) Wann heißt ein System von Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig?

Sind die Vektoren $(1, 1, 2)$, $(1, -1, 3)$ und $(2, 8, 1)$ linear abhängig über $\mathbb{R}$?

Aufgabe 2: (4 P.) Von den folgenden drei Aussagen sind zwei wahr und eine falsch. Sagen Sie, welche Aussage falsch ist, und geben Sie ein Gegenbeispiel, das dies belegt.

a) Sind die Spalten einer Matrix $A \in M(m \times n, k)$ linear abhängig, so gibt es einen Vektor $0 \neq v \in k^n$ mit $A \cdot v = 0$.

b) Angenommen, eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ hat n verschiedene Eigenwerte. In diesem Fall ist die Matrix diagonalisierbar.

c) Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$, die sich aus Eigenvektoren des selbstadjungierten Endomorphismus F zusammensetzt, so ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Orthonormalbasis.

Aufgabe 3: (4 P.) Wie lautet die Dimensionsformel für Unterräume eines endlich dimensionalen Vektorraums V?

Der 7-dimensionale Vektorraum V hat Unterräume U, W mit $\dim(U) = 4$ und $\dim(W) = 5$. Zeigen Sie, dass die Dimension des Schnitts $U \cap W$ mindestens zwei betragen muss.

Bitte wenden

Aufgabe 4: (5 P.) Wie lautet die Dimensionsformel für lineare Abbildungen? Begründen Sie, warum der Spaltenrang einer Matrix A mit der Rang der linearen Abbildung $L_A\colon v \mapsto A \cdot v$ übereinstimmt.

Ermitteln Sie den Rang der linearen Abbildung L_A in dem Fall

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in M(4 \times 8, \mathbb{R}) \,.$$

Aufgabe 5: (6 P.) Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei endlich dimensionalen Vektorräume. Beschreiben Sie, wie man f eine Matrix zuordnet.

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x,y,z) = (y+z, x+2y, y-x)$, und sei B die Basis $(1,2,0)$, $(3,0,1)$, $(1,1,-1)$ des $\mathbb{R}^3$. Finden Sie eine Basis C des $\mathbb{R}^3$ derart, dass die Matrix ${}_B\mathrm{M}_C(f)$ von f durch

$${}_B\mathrm{M}_C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben wird.

Aufgabe 6: (5 P.) Wie lautet die Definition des Begriffs Eigenwert? Nennen Sie einen Weg, um festzustellen, ob ein gegebener Skalar λ ein Eigenwert einer gegebener Matrix $A \in M_n(k)$ ist. Zeigen Sie, dass 3 ein Eigenwert der folgenden Matrix $A \in M_5(\mathbb{R})$ ist.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 & \pi & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ -17 & 3 & -8 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7: (5 P.) Wie lautet der Satz über die Hauptachsentransformation (euklidischer Fall)?

Finden Sie eine Matrix $T \in SO(2)$ derart, dass die Matrix $T^{-1} \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right) T$ Diagonalgestalt hat.

Erreichbare Punktzahl: 32