Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
M.Sc. Mikael Johansson

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Wintersemester 06/07 Lösungen zu Musterklausur 1

Aufgabe 1: (3 P.) Wann heißt ein System von Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig?
Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum $C^0(\mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Seien $f, g, h \in V$ die Funktionen $f(x) = x\cos(x)$, $g(x) = \sin^2(x)$ und $h(x) = 1 - x$. Ist das System $f(x), g(x), h(x)$ linear abhängig in V?

Lösung: Das System heißt linear unabhängig, wenn $\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0$, mit alle a_i aus der Basiskörper impliziert dass alle $a_i = 0$.
Sei $af + bg + ch = 0$. Dann ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ $ax\cos(x) + b\sin^2(x) + c(1-x) = 0$. Setzen wir $x = 0$, dann erhalten wir $c = 0$. Aus $x = \pi/2$ erhalten wir $b = 0$. Setzen wir $x = \pi$, folgt $-a\pi = 0$, und daher auch $a = 0$. Daher ist das System linear unabhängig.

Aufgabe 2: (4 P.) Von den folgenden drei Aussagen sind zwei wahr und eine falsch. Sagen Sie, welche Aussage falsch ist, und geben Sie ein Gegenbeispiel, das dies belegt.

a) Ist ein Erzeugendensystem des Vektorraums V linear unabhängig, so ist es eine Basis.

b) Ist $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, und gibt es ein $w \in W$ derart, dass $f(v) = w$ für höchstens ein $v \in V$ gilt, so ist f injektiv.

c) Sei $A \in M_n(k)$ eine Matrix und $\lambda \in k$ ein Skalar. Ist λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p_A(X)$, so gibt es einen Vektor $v \in k^n$ mit $A \cdot v = \lambda v$.

Lösung:

a) Eine Basis ist eine linear unabhängige Erzeugendensystem.

b) Sind $V, W = \mathbb{R}^3$. Sei weiterhin $f\colon (x, y, z) \mapsto (x, y + z, 0)$. Dann ist $w = (0, 0, 1)$ derart, dass $f(v) = w$ für keinen $v \in V$, und daher auf jeden Fall für höchstens ein $v \in V$. Jedoch ist der Abbildung nicht injektiv, denn z.B. $(0, 1, 0)$ hat als Urbilder $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ zugleich.

c) So berechnen wir üblicherweise der Eigenwerte einer Matrix.

Aufgabe 3: (4 P.) Wie lautet die Definition des Basis-Begriffs? (Beschränken Sie sich auf endliche Systeme.)
Der Unterraum V des $\mathbb{R}^4$ enthält u.a. die Vektoren $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, -1, 2)$ und $v_3 = (2, 1, 0, 2)$, enthält dagegen $w = (1, 0, 0, 2)$ nicht. Zeigen Sie, dass v_1, v_2, v_3 eine Basis des V ist. Begründen Sie insbesonsere, warum die Vektoren v_1, v_2, v_3 ganz V aufspannen.

Lösung: Eine Basis eines endlichdimensionalen Vektorraums ist eine linear unabhängiges Erzeugendensystem.
Da $w \notin V$ folgt $\dim V < 4$. Nun sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig, denn wäre $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$, dann folgte aus der zweite Koordinate dass $a = -c$, und aus der dritten Koordinate das $a = b$. Also wäre $a = b = -c$, und $av_1 + bv_2 + cv_3 = a(v_1 + v_2 - v_3) = a(0, 0, 0, 1)$. Wenn dieses die Nullvektor sein sollte, dann müsste $a = 0$ sein.
Also haben wir drei linear unabhängige Vektoren in ein Vektorraum dessen Dimension höchstens drei betragen kann. Daraus folgt $\dim V = 3$, und das die drei linear unabhängige Vektoren tatsächlich ein Erzeugendensystem sind, denn sonst gäbe es eine 3-dimensionalen echten Unterraum eines Raumes mit höchstens 3 Dimensionen.

Aufgabe 4: (4 P.) Wie lautet der Basisergänzungssatz? Wie lautet der Satz von der linearen Fortsetzung? Zeigen Sie, dass es mindestens eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gibt derart, dass $f(1, -2, 2) = (3, -1)$ und $f(1, 1, 3) = (1, 1)$ gilt. Gibt es ein solches f, das außerdem $f(1, 4, 4) = (-1, 3)$ erfüllt?

Lösung: Jedes linear unabhängige System lässt sich zu einer Basis fortsetzen.
Jede Abbildung von einer Basis von V nach W lässt sich auf genau einer Weise zu einer linearen Abbildung von V nach W fortsetzen.
Die Menge $\{(1, -2, 2), (1, 1, 3)\}$ lässt sich zu einer Basis ergänzen, laut der Basisergänzungssatz. Daher gibt es mindestens eine Basis für $\mathbb{R}^3$ mit diese beide Vektoren als Basisvektoren. Laut der Satz von der linearen Fortsetzung können wir die Abbildung, die $(1, -2, 2)$ auf $(3, -1)$, $(1, 1, 3)$ auf $(1, 1)$ und die zusätzliche Basisvektor auf irgendeine ausgewählte Zielvektor abbildet zu einer linearen Abbildung von V nach W fortsetzen. Da wir sowohl in der Basisergänzung als auch in der Wahl der dritten Zielvektor beliebige Wahle getroffen haben, ist es auf keinem Fall eindeutig, sondern lässt durchaus mehr als nur eine Möglichkeit zu.
Ob ein solches f, das auch $f(1, 4, 4) = (-1, 3)$ erfüllt, gibt, hängt davon ab ob $(1, 4, 4)$ zu $(1, -2, 2)$ und $(1, 1, 3)$ linear unabhängig ist. Die lineare unabhängigkeit können wir mit einer Gleichungssystem prüfen, und zwar

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und von diese Berechnung können wir ablesen, dass für $c = 1$, $b = -2c = -2$, $a = -b - c = 2 - 1 = 1$ gilt $a(1, -2, 2) + b(1, 1, 3) + c(1, 4, 4) = (1, -2, 2) - 2(1, 1, 3) + (1, 4, 4) = 0$ oder anders geschrieben, dass $(1, 4, 4) = 2(1, 1, 3) - (1, -2, 2)$. Daher muss, durch der linearität von f auch $f(1, 4, 4) = 2f(1, 1, 3) - f(1, -2, 2) = 2(1, 1) - (3, -1) = (-1, 3)$. Aus diese Berechnung folgt dass nicht nur gibt es solche f – jede f das aus die oben beschriebene Vorgehensweise produziert wird, wird auch in $(1, 4, 4)$ das vorgegebene Wert annehmen.

Aufgabe 5: (6 P.) Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei endlich dimensionalen Vektorräume. Beschreiben Sie, wie man f eine Matrix zuordnet.
Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung $f(x, y, z) = (x - y, y - z)$. Konstruieren Sie die Matrix von f bezüglich den Basen $(1, 2, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 3, 1)$ von $\mathbb{R}^3$ sowie $(1, -1)$, $(-4, 3)$ von $\mathbb{R}^2$.

Lösung: Erst muss man sich für Basen von V und W entscheiden. Dann wird die Funktionsbilder jeder Basiselement in V berechnet und als Linearkombinationen der Baseisvektoren aus W ausgedrückt. Die Koeffizienten dieser Linearkombinationen werden dann als Spaltenvektoren in der dazugehörige Matrix aufgeschrieben.
Erstens berechnen wir jeweils alle Funktionsbilder $f(1,2,1) = (-1,1)$, $f(1,0,1) = (1,-1)$, $f(0,3,1) = (-3,2)$.
Dann stellen wir die Funktionsbilder als Linearkombinationen der Basisvektoren dar: $(-1,1) = -1(1,-1) + 0(-4,3)$, $(1,-1) = 1(1,-1) + 0(-4,3)$ $(-3,2) = 1(1,-1) + 1(-4,3)$.
Und schliesslich schreiben wir der Matrix hin

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6: (6 P.) Wie definiert man das charakteristische Polynom einer quadratischen Matrix? Wie hilft dieses Polynom, um die Eigenwerte der Matrix zu ermitteln?
Bestimmen Sie eine Basis für jeden Eigenraum der Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Ist die Matrix diagonalisierbar?

Lösung: Das charakteristische Polynom von A wird durch $p_A(X) = \det(X\,\mathrm{Id} - A)$ definiert. Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen dieses Polynoms.
Sei nun $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Wir berechnen erst die Eigenwerte, und wollen somit das charakteristische Polynom ermitteln. Zu diesem Zwecke berechnen wir

$$\det \begin{pmatrix} x+1 & -1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x+1 \end{pmatrix} = (x+1) \det \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} - (-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & x+1 \end{pmatrix} = (x+1)(x(x+1)-1)+(x+1) = (x+1)\cdot x(x+1$$

und somit hat es auch die Nullstellen 0 und -1. Zu diese wollen wir noch Eigenräume finden.
Wir fangen mit 0 an. Dieses Eigenraum ist einfach den Kern zu A selbst. Wenn (x,y,z) in diesem Kern liegt, dann gilt $x = y$, $x = -z$ und $y = -z$, und somit ist $(1,1,-1)$ einen Basis dafür. Da der Matrix Rang 2 hat – denn die erste und zweite Zeile sind linear unabhängig von einander – ist dieses tatsächlich einen Basis für das gesamte Eigenraum.
Für den Fall -1 nun betrachten wir den Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und suchen den Kern. Da der ersten und letzten Zeile Multipeln von einander sind, hat dieser Matrix offensichtlich nicht voller Rang, jedoch, weil die erste und zweite Zeile linear unabhängig sind, hat der Matrix mindestens Rang 2. Also hat der Matrix Rang 2, und der Eigenraum ist 1-dimensional. Ist nun (x,y,z) im Eigenraum, dann ist wegen der ersten Zeile $y = 0$. Wegen der zweite Zeile, nun, ist aber $x = y$, und somit $x = 0$. Daher bildet $(0,0,1)$ eine Basis für den Eigenraum.

Da die Basen der Eigenräume zu klein sind – sie spannen nur ein Teilraum von Dimension 2 auf – gibt es keinem Basis aus Eigenvektoren für den gesamten k^3, und somit ist der Matrix nicht diagonalisierbar.

Aufgabe 7: (5 P.) Wie lautet der Spektralsatz (unitärer Fall)?
Finden Sie eine Orthonormalbasis für $\mathbb{C}^2$, die aus Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1+2i \\ 1-2i & -2 \end{pmatrix}$ besteht.

Lösung: Sei V ein endlich-dimensionaler Raum mit Skalarprodukt (d.h. euklidisch oder unitär), und F ein selbstadjungierter Endomorphismus von V. Dann sind alle Eigenwerte von F reell, und V hat eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von F.
Wir berechnen wieder als erstes die Eigenwerte der Matrix. Dazu berechnen wir das charakteristische Polynom

$$\det\begin{pmatrix} x-2 & -1-2i \\ -1+2i & x+2 \end{pmatrix} = (x-2)(x+2)-(-1-2i)(-1+2i) = x^2-4-(1+2i)(1-2i) = x^2-4-(1-4i^2) = x^2-9 = (x+3)(x-$$

und so haben wir die Eigenwerte ± 3.
Zu 3 mussen wir um das Eigenraum zu ermitteln den Kern mit dem Gauß'schen Algorithmus suchen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1-2i \\ -1+2i & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1-2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und wir stellen fest, dass der Kern aus (x, y) mit $x = (1+2i)y$ besteht, und daher einer Basis als $(1+2i, 1)$ zu erfassen ist.
Zu -3 betrachten wir

$$\begin{pmatrix} -5 & -1-2i \\ -1+2i & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & -1-2i \\ (-1+2i) + \frac{-1+2i}{5}(-5) & -1 + \frac{-1+2i}{5}(-1-2i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1-2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und wir können somit als Kernvektoren auffassen (x, y) mit $5x + (1+2i)y = 0$, oder $x = (1+2i)y/5$. Setzen wir $y = 5$ erhalten wir somit $x = 1+2i$, und so eine Basisvektor $(1+2i, 5)$.
Da die Basisvektoren für $\mathbb{C}^2$, die wir hiermit ermittelt haben, aus verschiedene Eigenräume kommen, sind sie auch orthogonal. Es fehlt uns nur noch die Normalisierung. Dazu berechnen wir gleich

$$\langle (1+2i, 1), (1+2i, 1) \rangle = (1+2i)(1-2i) + 1 = 6$$
$$\langle (1+2i, 5), (1+2i, 5) \rangle = (1+2i)(1-2i) + 25 = 30$$

und somit erhalten wir die Basisvektoren

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1+2i, 1)$$
$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}(1+2i, 5)$$