Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Wintersemester 2006/07 Muster-Klausur Nr. 1

Diese Musterklausur wurde zur Klausurvorbereitung erstellt. Keine Hilfsmittel. Rechnen Sie nicht damit, alle Aufgaben in der vorgesehenen Zeit zu lösen.

Wenn nichts anderes gesagt wird, ist k ein Körper und V ein k-Vektorraum.

Aufgabe 1: (3 P.) Wann heißt ein System von Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig?

Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum $C^0(\mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Seien $f, g, h \in V$ die Funktionen $f(x) = x\cos(x)$, $g(x) = \sin^2(x)$ und $h(x) = 1-x$. Ist das System $f(x), g(x), h(x)$ linear abhängig in V?

Aufgabe 2: (4 P.) Von den folgenden drei Aussagen sind zwei wahr und eine falsch. Sagen Sie, welche Aussage falsch ist, und geben Sie ein Gegenbeispiel, das dies belegt.

a) Ist ein Erzeugendensystem des Vektorraums V linear unabhängig, so ist es eine Basis.

b) Ist $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, und gibt es ein $w \in W$ derart, dass $f(v) = w$ für höchstens ein $v \in V$ gilt, so ist f injektiv.

c) Sei $A \in M_n(k)$ eine Matrix und $\lambda \in k$ ein Skalar. Ist λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p_A(X)$, so gibt es einen Vektor $v \in k^n$ mit $A \cdot v = \lambda v$.

Aufgabe 3: (4 P.) Wie lautet die Definition des Basis-Begriffs? (Beschränken Sie sich auf endliche Systeme.)

Der Unterraum V des $\mathbb{R}^4$ enthält u.a. die Vektoren $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, -1, 2)$ und $v_3 = (2, 1, 0, 2)$, enthält dagegen $w = (1, 0, 0, 2)$ nicht. Zeigen Sie, dass v_1, v_2, v_3 eine Basis des V ist. Begründen Sie insbesonsere, warum die Vektoren v_1, v_2, v_3 ganz V aufspannen.

Aufgabe 4: (4 P.) Wie lautet der Basisergänzungssatz? Wie lautet der Satz von der linearen Fortsetzung?

Zeigen Sie, dass es mindestens eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gibt derart, dass $f(1, -2, 2) = (3, -1)$ und $f(1, 1, 3) = (1, 1)$ gilt. Gibt es ein solches f, das außerdem $f(1, 4, 4) = (-1, 3)$ erfüllt?

Bitte wenden

Aufgabe 5: (6 P.) Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei endlich dimensionalen Vektorräume. Beschreiben Sie, wie man f eine Matrix zuordnet.

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung $f(x, y, z) = (x - y, y - z)$. Konstruieren Sie die Matrix von f bezüglich den Basen $(1, 2, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 3, 1)$ von $\mathbb{R}^3$ sowie $(1, -1)$, $(-4, 3)$ von $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 6: (6 P.) Wie definiert man das charakteristische Polynom einer quadratischen Matrix? Wie hilft dieses Polynom, um die Eigenwerte der Matrix zu ermitteln?

Bestimmen Sie eine Basis für jeden Eigenraum der Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Ist die Matrix diagonalisierbar?

Aufgabe 7: (5 P.) Wie lautet der Spektralsatz (unitärer Fall)?

Finden Sie eine Orthonormalbasis für $\mathbb{C}^2$, die aus Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1+2i \\ 1-2i & -2 \end{pmatrix}$ besteht.

Erreichbare Punktzahl: 32