LAAG1 - Klausur
FSU Jena - WS 06/07
- Lösungen -

Stilianos Louca

February 14, 2007

Aufgabe 1

a) Ein System von Vektoren $v_1, ..., v_n$ ist genau dann linear unabhängig wenn gilt:

$$\left(Sind\ \lambda_1, ..., \lambda_2 \in k : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \right) \Rightarrow (\lambda_i = 0\ \forall i \in \{1, ..., n\})$$

b)

$$A := \begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ - & v_2 & - \\ - & v_3 & - \end{pmatrix} \rightarrow Gauss \rightarrow Rang(A) = 3 \ \Rightarrow\ v_1, v_2, v_3\ Lin.Unabh.$$

Aufgabe 2

Aussage (c) ist falsch. Gegenbeispiel: Jede Einheitsmatrix E_n hat als einzigen Eigenwert die 1 und ist Diagonalisierbar denn $E_n^{-1} \cdot E_n \cdot E_n = E_n$.

Aufgabe 3

a) Seien $U, W \subseteq V$ Unterräume des endlich-dimensionalen k-Vektorraums V. Dann gilt:

$$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$$

b) Seien V, W zwei k-Vektorräume und V endlich dimensional. Sei $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:

$$dim(Kern(f)) + dim(Bild(f)) = dim(V)$$

c)

$$K_f := Kern(f), K_g := Kern(g), B_f := Bild(f), B_g := Bild(g)$$

$$dim(K_f \cap K_g) = dim(K_f) + dim(K_g) - dim(K_f + K_g) =$$

$$dim(\mathbb{R}^5) - dim(B_f) + dim(\mathbb{R}^5) - dim(B_g) - dim(K_f + K_g) \geq 5 - 2 + 5 - 2 - 5 = 1$$

$$\Rightarrow K_f \cap K_g \neq \{0\} \Rightarrow \exists v \neq 0 \in \mathbb{R}^5 : v \in K_f \wedge v \in K_g \quad \square$$

Aufgabe 4

a) Ist V ein endlich dimensionaler k-Vektorraum und $b_1, ..., b_r \in V$ linear unabhängige Vektoren. Dann gibt es Vektoren $b_{r+1}, ..., b_n \in V$ so dass $b_1, ..., b_r, b_{r+1}, ..., b_n$ eine Basis von V bilden.

b) Sind V, W zwei k-Vektorräume, $b_1, ..., b_n \in V$ eine Basis von V und $w_1, ..., w_n \in W$ beliebige Vektoren aus W. Dann existiert genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(b_i) = w_i \; \forall \; i \in \{1, ..., n\}$

c) Da v_1, v_2 linear Unabhängig kann man sie zu einer Basis v_1, v_2, v_3 von V fortsetzen. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $h : V \to W$ mit $h(v_1) = f(v_1), h(v_2) = g(v_2), h(v_3) = 0 \in W$. Da v_3 in einer Basis vorkommt, ist $v_3 \neq 0$ also ist auch die zweite Bedingung erfüllt. $\square$

Aufgabe 5

a) Sei $A \in M(m \times n, k)$ die gesuchte Matrix, wobei $n = dim(V), m = dim(W)$. Vorraussetzungen: Eine Basis $B : b_1, b_2, ..., b_n$ von V und eine Basis $C : c_1, c_2, ..., c_m$ von W. Dann ist A gegeben durch:

$$i - te\ Spalte\ von\ A = A \cdot e_i = Koordinatenvektor\ von\ f(b_i)\ bezüglich\ C$$

Da $f(b_i)$ bekannt ist und dessen Koordinatenvektor, ist auch A leicht zu konstruieren.

b)

$$Sei\ B : b_1 := (x_1, y_1), b_2 := (x_2, y_2)\ die\ gesuchte\ Basis.$$

$$\Rightarrow f(b_1) = (x_1 + y_1, x_1 - 2y_1, y_1 - x_1) \stackrel{!}{=} 1 \cdot (3, -3, 1) \;\Rightarrow\; x_1 = 1, y_1 = 2\ also\ b_1 = (1, 2)$$

$$Analog: \; f(b_2) = (x_2 + y_2, x_2 - 2y_2, y_2 - x_2) \stackrel{!}{=} 1 \cdot (3, 0, -1) \;\Rightarrow\; x_1 = 2, y_1 = 1\ also\ b_2 = (2, 1)$$

Aufgabe 6

a) Ein Skalar $\lambda \in k$ ist genau dann ein Eigenwert von A wenn:

$$\exists v \in k^n : v \neq 0 \wedge A \cdot v = \lambda \cdot v$$

Der Eigenraum $E_\lambda(A)$ eines Eigenwertes λ ist definiert als:

$$E_\lambda(A) := \{v \in k^n \mid A \cdot v = \lambda \cdot v\}$$

b) Das charakteristische Polynom $P_x(A)$ von A ist definiert als:

$$P_x(A) := \det(XE_n - A)$$

Die Nullstellen dieses Polynoms sind genau die Eigenwerte von A.

c)

$$P_x(A) = \det(XE_3 - A) = x^2(x - 4) \;\Rightarrow\; \lambda_1 := 0, \lambda_2 := 4\ Eigenwerte\ von\ A$$

$$Eigenräume: \; E_{\lambda_1}(A) = \{(-\alpha - 2\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}, \; Basis : v_1 := (-1, 1, 0), v_2 := (-2, 0, 1)$$

$$E_{\lambda_2}(A) = \{(\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}, \; Basis: \; v_3 := (1, 1, 1)$$

d) Da v_1, v_2, v_3 linear Unabhängig bilden sie eine Basis von $\mathbb{R}^3$ die aus lauter Eigenvektoren von A besteht. Das heisst A ist diagonalisierbar.

Aufgabe 7

a) Ist V eine endlich dimensionaler unitärer Vektorraum, und F ein selbstadjungierter Endomorphismus auf V, dann gilt:

1) F hat mindestens einen Eigenwert.
1) Alle Eigenwerte von F sind reell.
1) Es gibt eine Orthonormalbasis von V die aus lauter Eigenvektoren von F besteht.

b) Sei B diese Matrix.

$$P_x(B) = x^2 - 3x - 2 \;\Rightarrow \lambda_1 := \frac{3+\sqrt{17}}{2},\;\; \lambda_2 := \frac{3-\sqrt{17}}{2} \quad : Eigenwerte\ von\ B$$

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \left(\frac{2(1+i)\alpha}{3+\sqrt{17}}, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{C} \right\}\ Basis:\ v_1 := \left(\frac{4}{3+\sqrt{17}}, 1-i \right)$$

$$E_{\lambda_2} = \left\{ \left(\frac{-2(1+i)\alpha}{\sqrt{17}-3}, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{C} \right\}\ Basis:\ v_2 := \left(\frac{-4}{\sqrt{17}-3}, 1-i \right)$$

$$u_1 := \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1 = \frac{3+\sqrt{17}}{\sqrt{68+12\sqrt{17}}} \cdot v_1, \quad u_2 := \frac{1}{\|v_2\|} \cdot v_2 = \frac{\sqrt{17}-3}{\sqrt{68-12\sqrt{17}}} \cdot v_2$$

$$\Rightarrow \|u_1\| = \|u_2\| = 1,\ u_1 \perp v_2\ da\ B\ hermitesch\ \wedge \lambda_1 \neq \lambda_2, \rightarrow u_1, u_2\ linear\ Unabhängig$$

$$\Rightarrow u_1, u_2 : ONB\ von\ \mathbb{C}^2\ \wedge\ u_1, u_2\ Eigenvektoren\ von\ B.$$