Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Wintersemester 2006/07 Klausur 13.02.2007

Name: **Matrikel-Nr.:**

Studiengang:

Dauer: $2\frac{1}{2}$ Stunden Diese Klausur besteht aus sieben Aufgaben. Rechnen Sie nicht damit, alle Aufgaben bearbeiten zu können. Wer 13 Punkte schafft, hat bestanden. Keine Hilfsmittel.
Bitte fangen Sie jede Aufgabe auf ein neues Blatt an. Bitte schreiben Sie Name und Matrikel-Nr. auf jedes Blatt. Bitte geben Sie diesen Klausurbogen als Deckblatt ab. Die Klausur wird ins Netz gestellt.

Aufgabe 1: (3 P.) Wann heißt ein System von Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ linear unabhängig?

Sind die Vektoren $(1, 0, 1, 1)$, $(1, 2, 2, 3)$ und $(1, 1, 2, 1)$ linear abhängig über $\mathbb{R}$?

Aufgabe 2: (4 P.) Von den folgenden drei Aussagen sind zwei wahr und eine falsch. Sagen Sie, welche Aussage falsch ist, und geben Sie ein Gegenbeispiel, das dies belegt.

a) Ist $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, und gibt es ein $w \in W$ derart, dass $f(v) = w$ für genau ein $v \in V$ gilt, so ist f injektiv.

b) Ist $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ eine lineare Abbildung, so ist

$$\dim \mathrm{Bild}(f) + \dim \mathrm{Kern}(f) = n\,.$$

c) Ist eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisierbar, so gibt es n verschiedene Eigenwerte.

Bitte wenden

1	2	3	4	5	6	7	$\sum$

Aufgabe 3: (4 P.) Wie lautet die Dimensionsformel für Unterräume eines endlich dimensionalen Vektorraums? Wie lautet die Dimensionsformel für lineare Abbildungen?

Zeigen Sie: sind f, g zwei lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^5$ nach $\mathbb{R}^2$, so gibt es mindestens einen Vektor $0 \neq v \in \mathbb{R}^5$ derart, dass $f(v) = g(v) = 0$ gilt.

Aufgabe 4: (4 P.) Wie lautet der Basisergänzungssatz? Wie lautet der Satz von der linearen Fortsetzung?

Sei V ein 3-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Seien v_1, v_2 zwei linear unabhängige Elemente von V, und seien f, g zwei lineare Abbildungen von V nach $\mathbb{C}^3$.

Zeigen Sie, dass es mindestens eine lineare Abbildung $h\colon V \to \mathbb{C}^3$ gibt derart, dass $h(v_1) = f(v_1)$ und $h(v_2) = g(v_2)$ gelten. Zeigen Sie ferner, dass man außerdem verlangen kann, dass es ein $0 \neq w \in V$ gibt mit $h(w) = 0$.

Aufgabe 5: (6 P.) Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei endlich dimensionalen Vektorräume. Beschreiben Sie, wie man f eine Matrix zuordnet.

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x, y) = (x + y, x - 2y, y - x)$, und sei C die Basis $(3, -3, 1)$, $(3, 0, -1)$, $(0, 1, 0)$ des $\mathbb{R}^3$. Finden Sie eine Basis B des $\mathbb{R}^2$ derart, dass die Matrix ${}_B\mathrm{M}_C(f)$ von f durch

$$
{}_B\mathrm{M}_C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

gegeben wird.

Aufgabe 6: (6 P.) Sei $A \in M_n(k)$ eine Matrix. Wie sind die Begriffe Eigenwert und Eigenraum definiert für A? Was ist das charakteristische Polynom von A, und wie benutzt man dieses Polynom, um die Eigenwerte zu bestimmen?

Bestimmen Sie die Eigenwerte und eine Basis für jeden Eigenraum der Matrix

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})\,.
$$

Ist die Matrix diagonalisierbar?

Aufgabe 7: (5 P.) Wie lautet der Spektralsatz (unitärer Fall)?

Finden Sie eine Orthonormalbasis für $\mathbb{C}^2$, die aus Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}$ besteht.

Erreichbare Punktzahl: 32