

Kosmologie  
FSU Jena - SS 2010  
Serie 06 - Lösungen

Stilianos Louca

July 19, 2010

**Aufgabe 01**

(a) Unter Verwendung der Definitionen

$$\Omega_M := \frac{8\pi G}{3H^2} \mu_M \quad , \quad \Omega_R := \frac{8\pi G}{3H^2} \mu_R \quad , \quad \Omega_\Lambda := \frac{\Lambda c^2}{3H^2} \quad , \quad \Omega_K := -\frac{\varepsilon c^2}{R^2 H^2} \quad , \quad \widetilde{M}_M := \mu_M c^2 R^3 \quad (0.1)$$

und der Friedman-Lemaitre Gleichung

$$1 = \Omega_K + \Omega_R + \Omega_\Lambda + \Omega_M \quad (0.2)$$

lässt sich zeigen dass für Staubkosmen ( $\mu_R = 0$ ) die Bedingung

$$\Omega_{\Lambda o} a^3 + (1 - \Omega_{Mo} - \Omega_{\Lambda o})a + \Omega_{Mo} = 0 \quad (0.3)$$

äquivalent ist zu

$$\frac{c^2}{3} \Lambda R^2 + \frac{8\pi G}{3c^2} \frac{\widetilde{M}_M}{R} - \varepsilon c^2 = 0 \quad . \quad (0.4)$$

Doch dies ist genau die Friedman-Lemaitre Gleichung ( $p = 0$ )

$$\underbrace{\frac{c^2}{3} \Lambda R^2 + \frac{8\pi G}{3c^2} \frac{\widetilde{M}_M}{R}}_{-U_{\text{eff}}(R)} - \varepsilon c^2 = \dot{R}^2 \quad (0.5)$$

ausgewertet für  $\dot{R} = 0$ . Damit entspricht (0.3) der Bedingung an  $a$  am Wendepunkt, im Modell für das es noch gerade so einen Wendepunkt gibt.

Betrachten nun die Beschleunigungsgleichung für Friedman-Lemaitre Modelle ( $p = 0$ )

$$2 \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\varepsilon c^2 + \dot{R}^2}{R^2} - \Lambda c^2 = 0 \quad (0.6)$$

Einsetzen von (0.5) in (0.6) zur Eliminierung von  $\dot{R}$  liefert

$$2 \frac{\ddot{R}}{R} - \frac{U_{\text{eff}}(R)}{R^2} - \Lambda c^2 = 0 \quad . \quad (0.7)$$

Besitzt  $a(t) := R(t)/R_o$  einen Wendepunkt bei  $a_w =: R_w/R_o$ , so nimmt dort (0.7) die Form

$$-\frac{U_{\text{eff}}(w)}{R_w^2} - \Lambda c^2 = 0 \quad (0.8)$$

bzw. mit Hilfe von (0.5) und (0.1) die Form

$$R_w^3 = \frac{8\pi G}{2c^4 \Lambda} \widetilde{M}_M = \frac{\Omega_{Mo} R_o^3}{2\Omega_{\Lambda o}} \quad (0.9)$$

an. Bedingung (0.9) lässt sich schreiben als

$$a_w = \left[ \frac{\Omega_{Mo}}{2\Omega_{\Lambda o}} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (0.10)$$

Die Bedingung für die Existenz eines Wendepunktes von  $a(t)$  ist bekanntlich entweder  $\varepsilon \in \{0, -1\}$  oder  $\varepsilon = +1$  und  $\Lambda \geq \Lambda_E$ , wobei

$$\Lambda_E := \left[ \frac{c^4}{4\pi G \widetilde{M}_M} \right]^2 \quad (0.11)$$

die der Masse  $\widetilde{M}_M$  entsprechende kosmologische Konstante im Einstein Kosmos wäre. Letztere beiden Bedingungen lassen sich mit Hilfe von (0.1) gemäß

$$\Omega_K = -\frac{c^2}{R^2 H^2} \quad , \quad \Omega_\Lambda \geq \frac{4c^6}{27H^6 R^6 \Omega_M^2} \quad (0.12)$$

formulieren. Kombination der beiden Bedingungen in (0.12) und (0.2) liefert schließlich

$$4(1 - \Omega_\Lambda - \Omega_M)^3 + 27\Omega_M^2 \Omega_\Lambda \geq 0 \quad (0.13)$$

- (b) Betrachten die Friedman-Lemätre Gleichung (0.5) für Staubkosmen mit  $\varepsilon = +1$ . Das Maximum des effektiven Potentials  $U_{\text{eff}}$  liegt genau bei

$$R_{\text{max}} = \left[ \frac{\varkappa \widetilde{M}_M}{2\Lambda} \right]^{\frac{1}{3}} = \left[ \frac{1}{\Lambda \sqrt{\Lambda_E}} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (0.14)$$

mit dem Wert

$$U_{\text{eff}}(R_{\text{max}}) = -c^2 \left[ \frac{\Lambda}{\Lambda_E} \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (0.15)$$

Hieraus ist zu erkennen, dass im Falle  $\Lambda > \Lambda_E$  das (vom Urknall kommende) Universum stets expandiert. Das Potential  $U_{\text{eff}}(R)$  ist streng monoton wachsend für  $R < R_{\text{max}}$  und streng monoton fallend für  $R > R_{\text{max}}$ . Zusammen mit  $\dot{R} = -\partial_R U_{\text{eff}}$  führt dies dazu, dass die Expansion für  $R < R_{\text{max}}$  verzögert und für  $R > R_{\text{max}}$  beschleunigt wird. Ist  $\Lambda \approx \Lambda_E$ , so ist im Bereich  $R \approx R_{\text{max}}$  die Expansion natürlich extrem langsam:  $\dot{R} \ll R$ . Der Punkt  $R_{\text{max}}$  ist übrigens genau der Wendepunkt von  $R(t)$  aus Teil (a).

Aus (0.5) ist zu erkennen dass

$$H^2 = \frac{\dot{R}^2}{R^2} = -\frac{\varepsilon c^2}{R^2} - \frac{U_{\text{eff}}(R)}{R^2} = \frac{c^2}{3} \Lambda + \mathcal{O}(\varepsilon R^{-2}) + \mathcal{O}(R^{-3}) \quad (0.16)$$

für  $R \rightarrow \infty$ , bzw.

$$H \xrightarrow{R \rightarrow \infty} c \cdot \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \quad (0.17)$$

Aus den Definitionen (0.1) und der Friedman-Lemaitre Gleichung (0.2) ist abzulesen

$$\mu_{Mo} \stackrel{(0.1)}{=} \frac{3H_o^2}{8\pi G} \Omega_{Mo} \stackrel{(0.2)}{=} \frac{3H_o^2}{8\pi G} [1 - \Omega_{\Lambda o} - \Omega_{Ko}] \stackrel{(0.1)}{=} \frac{3}{8\pi G} \left[ H_o^2 - \frac{c^2}{3} \Lambda + \frac{\varepsilon c^2}{R_o^2} \right] \quad (0.18)$$

Zusammen mit der Beziehung  $(1+z) = R_o/R_{\text{max}}$  und (0.14) lässt sich (0.18) schreiben als

$$\mu_{Mo} = \frac{3}{8\pi G} \left[ H_o^2 - \frac{c^2}{3} \cdot \Lambda + \frac{\varepsilon c^2 \cdot \sqrt[3]{\Lambda_E}}{(1+z)^2} \cdot \Lambda^{\frac{2}{3}} \right] \quad (0.19)$$

Für  $\Lambda \approx \Lambda_E$  und  $\varepsilon = +1$  nimmt (0.19) die spezielle Form

$$\mu_{Mo} \approx \frac{3}{8\pi G} \left[ H_o^2 + \left[ \frac{1}{(1+z)^2} - \frac{1}{3} \right] \cdot c^2 \Lambda \right] \quad (0.20)$$

an. Beachte dass Friedmann-Lemaitre Staubkosmen mit  $\varepsilon = +1$  durch zwei Parameter festgelegt sind, z.B.  $\Lambda$  und  $\widetilde{M}_M$ . Doch unter der Forderung dass  $\Lambda \approx \Lambda_E$ , wird der Kosmos nur noch durch einen Parameter beschrieben, z.B.  $H_o$  (definiert zum Zeitpunkt der Rotverschiebung  $z$  nach  $R_{\max}$ ). Ziel ist es nun  $\Lambda$  in (0.20) durch  $H_o$  zu ersetzen.

Machen ab nun die Näherung  $\Lambda \approx \Lambda_E$ . Ist  $\mu_{\max}$  die Massendichte für  $R = R_{\max}$  so gilt

$$R_{\max} \stackrel{(0.14)}{\approx} \frac{1}{\sqrt{\Lambda_E}} \stackrel{(0.11)}{=} \frac{4\pi G \widetilde{M}_M}{c^4} \stackrel{(0.1)}{=} \frac{4\pi G \mu_{\max} R_{\max}^3}{c^2} \quad (0.21)$$

bzw.

$$\mu_{\max} \stackrel{(0.21)}{\approx} \frac{c^2}{4\pi G} \frac{1}{R_{\max}^2} \stackrel{(0.21)}{\approx} \frac{c^2 \Lambda_E}{4\pi G} \quad (0.22)$$

Ersetz man

$$\mu_{Mo} = \mu_{\max} \cdot \frac{\mu_{Mo}}{\mu_{\max}} = \mu_{\max} \cdot \left[ \frac{R_{\max}}{R_o} \right]^3 = \frac{\mu_{\max}}{(1+z)^3} \stackrel{(0.22)}{=} \frac{c^2}{4\pi G} \frac{\Lambda_E}{(1+z)^3} \quad (0.23)$$

in der linken Seite von (0.20) so lässt sich durch Umstellen und der Näherung  $\Lambda \approx \Lambda_E$  zeigen dass

$$c^2 \Lambda_E \approx H_o^2 \cdot \left[ \frac{2}{3(1+z)^3} - \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{3} \right]^{-1} \quad (0.24)$$

Wiederum eingesetzt in (0.20) führt schließlich auf

$$\boxed{\mu_{Mo} \approx \frac{3H_o^2}{8\pi G} \left[ 1 - \frac{3}{2}(1+z) + \frac{1}{2}(1+z)^3 \right]^{-1}} \quad (0.25)$$

Für den Spezialfall  $z = 2$  erhält man

$$\boxed{\mu_{Mo} \approx \frac{3H_o^2}{80\pi G}} \quad (0.26)$$

## Aufgabe 02

(a) Die allgemeine Friedman-Lemaitre Gleichung lautet

$$\begin{aligned} \dot{R}^2 &= \frac{8\pi G}{3} (\mu_M + \mu_R) R^2 + \frac{c^2}{3} \Lambda R^2 - \varepsilon c^2 \\ &= c^2 \frac{R_o^2}{R^2} \cdot \left[ \frac{8\pi G}{3c^2} \frac{R^4}{R_o^2} \mu_M + \frac{8\pi G}{3c^2} \frac{R^4}{R_o^2} \mu_R + \frac{\Lambda R^4}{3R_o^2} - \varepsilon \frac{R^2}{R_o^2} \right] \end{aligned} \quad (0.27)$$

Unter Verwendung der Erhaltungssätze  $\mu_{Mo} R_o^3 = \mu_M R^3$  und  $\mu_{Ro} R_o^4 = \mu_R R^4$  nimmt (0.28) die Form

$$\dot{R}^2 = c^2 \frac{R_o^2}{R^2} \cdot \left[ \frac{8\pi G}{3c^2} \mu_{Mo} R_o R + \frac{8\pi G}{3c^2} \mu_{Ro} R_o^2 + \frac{\Lambda R^4}{3R_o^2} - \varepsilon \frac{R^2}{R_o^2} \right] \quad (0.28)$$

an. Unter Verwendung der Definitionen (0.1) nimmt (0.28) die Form

$$\dot{R}^2 = -\varepsilon c^2 \frac{R_o^2}{R^2} \cdot \left[ \frac{R}{R_o} \frac{\Omega_{Mo}}{\Omega_{Ko}} + \frac{\Omega_{Ro}}{\Omega_{Ko}} + \frac{R^4}{R_o^4} \frac{\Omega_{\Lambda o}}{\Omega_{Ko}} + \frac{R^2}{R_o^2} \right] \quad (0.29)$$

an. Ersetzung von  $R/R_o =: a$  in (0.29) ergibt

$$\frac{R_o^2}{c^2} \dot{a}^2 = -\varepsilon \left[ \frac{\Omega_{Mo}}{\Omega_{Ko}} a + \frac{\Omega_{Ro}}{\Omega_{Ko}} + \frac{\Omega_{\Lambda o}}{\Omega_{Ko}} a^4 + a^2 \right] . \quad (0.30)$$

Durch die Transformation  $d\eta = \frac{cdt}{R}$  erhält man aus (0.30) schließlich

$$\boxed{\left[ \frac{da}{d\eta} \right]^2 = -\frac{\varepsilon}{\Omega_{Ko}} [\Omega_{Mo} a + \Omega_{Ro} + \Omega_{\Lambda o} a^4 + \Omega_{Ko} a^2]} \quad (0.31)$$

Im Falle  $\varepsilon = 0$  ist  $-\varepsilon/\Omega_{Ko}$  in (0.31) lediglich durch  $R_o^2 H_o^2 / c^2$  zu ersetzen.

- (b) Unter der Anfangsbedingung  $\eta_M = \eta_R = 0$  für  $a = 0$ , erhält man für einen Staubkosmos ( $\Omega_R = 0, \Omega_M \neq 0$ ) nach der L'Hopitalschen Regel

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\eta_M}{\sqrt{a}} \stackrel{\text{L'H.}}{=} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\frac{d\eta_M}{da}}{\frac{1}{2\sqrt{a}}} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{a}}{\frac{da}{d\eta_M}} \stackrel{(0.31)}{=} \sqrt{-\frac{\Omega_{Ko}}{\varepsilon}} \cdot \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\Omega_{Mo} a}} = \text{const} \neq 0 \quad (0.32)$$

spricht  $\eta_M(a) \in \mathcal{O}(\sqrt{a})$  für  $a \rightarrow 0$ . Analog erhält man für einen Strahlungskosmos ( $\Omega_M = 0, \Omega_R \neq 0$ )

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\eta_R}{a} \stackrel{\text{L'H.}}{=} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{d\eta_R}{da} \stackrel{(0.31)}{=} \lim_{a \rightarrow 0} \sqrt{-\frac{\Omega_{Ko}}{\varepsilon \Omega_{Ro}}} = \text{const} \neq 0 \quad (0.33)$$

spricht  $\eta_R(a) \in \mathcal{O}(a)$  für  $a \rightarrow 0$ .

### Aufgabe 03

Die DGL (0.30) lässt sich nach Ersetzung von  $-\varepsilon/\Omega_{Ko}$  durch  $R_o^2 H_o^2 / c^2$  schreiben als

$$\begin{aligned} \dot{a}^2 &= \frac{R_o^2}{R^2} H_o^2 \cdot [\Omega_{Mo} a + \Omega_{Ro} + \Omega_{\Lambda o} a^4 + \Omega_{Ko} a^2] \\ &= a^2 H_o^2 \cdot \left[ \frac{\Omega_{Mo}}{a^3} + \frac{\Omega_{Ro}}{a^4} + \Omega_{\Lambda o} + \frac{\Omega_{Ko}}{a^2} \right] \end{aligned} \quad (0.34)$$

Im Falle eines flachen Weltmodells ( $\varepsilon = 0 = \Omega_{Ko}$ ) ohne Strahlung ( $\Omega_{Ro} = 0$ ) nimmt (0.34) mit Hilfe von Definitionen (0.2) die Form

$$\boxed{\frac{da}{dt} = a H_o \cdot \left[ \frac{1 - \Omega_{\Lambda o}}{a^3} + \Omega_{\Lambda o} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (0.35)$$

an. Unter der Anfangsbedingung  $a(t = 0) = 0$  erhält man durch Trennung der Variablen die Lösung von (0.35) gemäß

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{H_o} \int_0^1 \frac{da}{a} \left[ \Omega_{\Lambda o} + \frac{1 - \Omega_{\Lambda o}}{a^3} \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{H_o} \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{\Lambda o}}} \ln \left[ a^{\frac{3}{2}} \Omega_{\Lambda o} + \sqrt{\Omega_{\Lambda o}} \sqrt{1 + (a^3 - 1)\Omega_{\Lambda o}} \right] \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{H_o} \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{\Lambda o}}} \ln \left[ \frac{\sqrt{\Omega_{\Lambda o}} + 1}{\sqrt{1 - \Omega_{\Lambda o}}} \right] \end{aligned} \quad (0.36)$$

Speziell für  $\Omega_{\Lambda o} = 0$  geht (0.36) über in den bekannten Ausdruck

$$t|_{\Omega_{\Lambda o}=0} = \frac{2}{3H_o} \quad (0.37)$$

für Einstein-de-Sitter Kosmen. Für  $\Omega_{\Lambda o} = 0.7$  geht (0.36) über in

$$t|_{\Omega_{\Lambda o}} \approx \frac{0.9641}{H_o} \quad (0.38)$$

was einem deutlich älterem Kosmos entspricht.

## Aufgabe 04

- (a) Durch die Energiebilanzen  $\mu_{Me} = \mu_{Mo} R_o^3 / R_e^3$  und  $\mu_{Re} = \mu_{Ro} R_o^4 / R_e^4$  erhält man die Dichteverhältnisse zum Emissionszeitpunkt

$$\frac{\mu_{Re}}{\mu_{Me}} = \frac{\mu_{Ro}}{\mu_{Mo}} \cdot \frac{R_o}{R_e} \quad (0.39)$$

Fand die Emission zur Rotverschiebung  $z_{eq} = \mu_{Mo} / \mu_{Ro} - 1$  statt, so folgt aus  $1 + z = R_o / R_e$  und (0.39) die damalige Gleichheit der Dichten:

$$\frac{\mu_{Re}}{\mu_{Me}} = \frac{\mu_{Ro}}{\mu_{Mo}} \cdot (1 + z_{eq}) = 1 \quad (0.40)$$

Mit Hilfe von Definition (0.1) für  $\Omega_{Mo}$  und dem Stefan-Boltzman Gesetz  $\mu_R c^2 = 4\sigma T^4 / c$  lässt sich  $z_{eq}$  ausdrücken durch

$$z_{eq} = \frac{3c^3 H_o^2 \Omega_{Mo}}{8\pi G \sigma T_o^4} - 1 \quad (0.41)$$

- (b) Mit  $\sigma \approx 5.67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ ,  $H_o \approx 70 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ ,  $T_o \approx 2.725 \text{ K}$  und  $\Omega_{Mo} \approx 0.27$  erhält man aus (0.41):

$$z_{eq} \approx 5.3 \times 10^3 \quad (0.42)$$

Unter Verwendung von

$$1 + z_{eq} = \frac{R_o}{R_{eq}} = \sqrt[4]{\frac{\mu_{R,eq}}{\mu_{Ro}}} = \frac{T_{eq}}{T_o} \quad (0.43)$$

erhält man die damalige Temperatur

$$T_{eq} \approx 1.4 \times 10^4 \text{ K} \quad (0.44)$$

- (c) Nach Stefan-Boltzman ist stets  $\mu_R c^2 = 4\sigma T^4 / c$ . Aus der Strahlungserhaltung  $\mu_R R^4 = \text{const}$  folgt somit

$$T^4 = \frac{c^3 \mu_{Ro} R_o^4}{4\sigma R^4} \quad (0.45)$$

bzw.

$$\dot{T} = - \left[ \frac{c^3 \mu_{Ro} R_o^4}{4\sigma} \right]^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{\dot{R}}{R^2} \quad (0.46)$$

Die allgemeine Friedman-Laimert Gleichung (0.27) lässt sich mit Hilfe der Massen- und Strahlungserhaltung schreiben als

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3R} \underbrace{\mu_{Mo} R_o^3}_{\text{const}} + \frac{8\pi G}{3R^2} \underbrace{\mu_{Ro} R_o^4}_{\text{const}} + \frac{c^2}{3} \Lambda R^2 - \varepsilon c^2 \quad (0.47)$$

woraus die Dominanz der Strahlung für  $R \rightarrow 0$  zu erkennen ist, sprich  $\dot{R} \in \mathcal{O}(R^{-2})$  für  $R \rightarrow 0$ . Genauer gesagt

$$\dot{R}^2 \cdot R^2 \xrightarrow{R \rightarrow 0} \frac{8\pi G}{3} \mu_{Ro} R_o^4 \quad (0.48)$$

Zusammen mit (0.45) und (0.46) bedeutet dies

$$\frac{\dot{T}^2}{T^6} \cdot \frac{c^3 \mu_{Ro} R_o^4}{4\sigma} \stackrel{(0.45)}{=} \stackrel{(0.46)}{=} \dot{R}^2 R^2 \xrightarrow{R \rightarrow 0} \frac{8\pi G}{3} \mu_{Ro} R_o^4 \quad (0.49)$$

bzw.

$$\frac{\dot{T}^2}{T^2} \cdot \frac{1}{T^4} \xrightarrow{R \rightarrow 0} \frac{32\pi\sigma G}{3c^3} =: C \approx 4.71 \times 10^{-42} \text{ s}^{-2} \cdot \text{K}^{-4} \quad (0.50)$$

In der frühen Entwicklungsphase erfüllte daher  $T$  die DGL

$$\frac{\dot{T}}{T^3} \approx \sqrt{C} \quad (0.51)$$

die mit der Anfangsbedingung  $T(t_1) = T_1$  die Lösung

$$\boxed{\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T^2} = 2\sqrt{C}(t - t_1)} \quad (0.52)$$

besitzt. Aus (0.48) ist zu erkennen, dass  $R$  sich in der Frühphase im etwa gemäß

$$\dot{R}^2 R^2 \approx \frac{8\pi G}{3} \mu_{Ro} R_o^4 =: B \quad (0.53)$$

verhalten hat. Lösung dieser DGL mit Anfangsbedingung  $R(0) = 0$  ergibt

$$R(t) \approx [4t^2 B]^{\frac{1}{4}} \quad (0.54)$$

Nach Teil (a) entspricht dem Zeitpunkt  $t_{\text{eq}}$  einer Dichtegleichheit  $\mu_R = \mu_M$ , die Rotverschiebung  $z_{\text{eq}} = \mu_{Mo}/\mu_{Ro} - 1$ , sprich

$$(1 + z_{\text{eq}}) = \frac{R_o}{R_{\text{eq}}} \stackrel{(0.54)}{\approx} R_o [4t_{\text{eq}}^2 B]^{-\frac{1}{4}} \stackrel{(0.53)}{=} [2t_{\text{eq}}]^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[ \frac{8\pi G}{3} \mu_{Ro} \right]^{-\frac{1}{4}} = [2t_{\text{eq}}]^{-\frac{1}{2}} \cdot C^{-\frac{1}{4}} T_o^{-1} \quad (0.55)$$

bzw.

$$\boxed{t_{\text{eq}} \approx \frac{T_o^{-2}}{2\sqrt{C}} (1 + z_{\text{eq}})^{-2}} \quad (0.56)$$

Nach Einsetzen von (0.42) und  $T_o \approx 2.725 \text{ K}$  ergibt sich, dass eine Dichtegleichheit zum Zeitpunkt

$$t_{\text{eq}} \approx 3.5 \times 10^4 \text{ a} \quad (0.57)$$

vorlag.

(d) Analog zu Teil (c) erhält man die Entstehungszeit  $t_{\text{CMBR}}$  der Hintergrundstrahlung gemäß

$$t_{\text{CMBR}} \approx \frac{T_o^{-2}}{2\sqrt{C}} (1 + z_{\text{CMBR}})^{-2} \approx 8.1 \times 10^5 \text{ a} \quad (0.58)$$