Kosmologie
FSU Jena - SS 2010
Serie 05 - Lösungen

Stilianos Louca

July 19, 2010

Aufgabe 01

(a) Aus Abbildung (0.1) ist abzulesen

$$\Delta t = \frac{x}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{(2a)^2 - (2b)^2} = \frac{2a}{c}\sqrt{1 - \left(\tfrac{b}{a}\right)^2} \tag{0.1}$$

sprich

$$\boxed{a = \frac{c}{2}\frac{\Delta t}{\sqrt{1 - b^2/a^2}} \quad .} \tag{0.2}$$

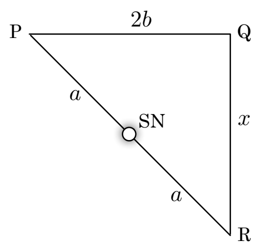

Figure 0.1: Zur Aufgabe 01.

(b) Einem Achsenverhältnis $b/a \approx 0.68$ und einer Lichtlaufzeit $\Delta t \approx 350$ d entspricht ein Ringradius von etwa

$$\boxed{a \approx 0.655 \text{ Lj} \quad .} \tag{0.3}$$

(c) Ein Winkeldurchmesser von $\varphi = 1.66''$ entspricht einem Abstand von etwa

$$\boxed{d = \frac{2a}{\varphi} \approx 1.63 \times 10^5 \text{ Lj} \approx 50.2 \text{ kpc} \quad .} \tag{0.4}$$

Aufgabe 02

(a) Die Bahngeschwindigkeit v ergibt sich als halbe Differenz zwischen maximaler und minimaler beobachteter Radialgeschwindigkeit. Aus der entsprechenden Abbildung ist für beide Sterne abzulesen

$$\boxed{\mathrm{v} \approx 168.8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}} \tag{0.5}$$

Angesichts der Periode $P = 5.726$ d, entspricht dies einem Bahnradius von

$$\boxed{R = \frac{\mathrm{v}P}{2\pi} \approx 1.33 \times 10^{10} \text{ m} \approx 4.31 \times 10^{-7} \text{ pc}} \tag{0.6}$$

(b) Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz erhält man eine jeweilige Sternmasse von ca.

$$\boxed{M = \frac{4R\mathrm{v}^2}{G} \approx 2.27 \times 10^{31}\ \mathrm{kg} \approx 11.4\ \mathrm{M}_\odot} \tag{0.7}$$

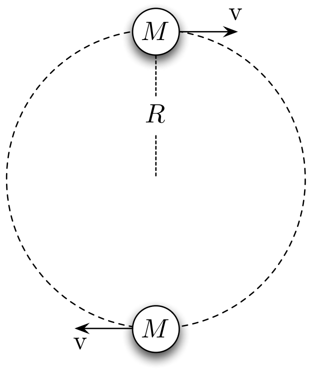

Figure 0.2: Zur Aufgabe 02.

(c) Sei r der Radius der beiden Stern und α die Winkelspanne während derer, für einen unendlich weit entfernten Beobachter, eine Überlappung der beiden Sternscheiben zu beobachten ist (vgl. Abbildung (0.3)).

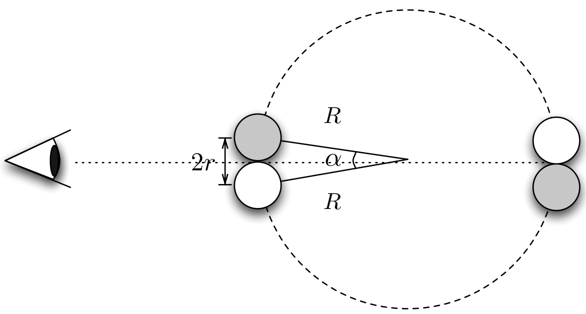

Figure 0.3: Zur Aufgabe 03.

Aus der Abbildung ist abzulesen

$$r = R \sin\frac{\alpha}{2} \quad . \tag{0.8}$$

Aus der Lichtkurve lässt sich abschätzen $\alpha \approx 0.92$ rad, was angesichts (0.6) einem Sternradius von etwa

$$\boxed{r \approx 5.90 \times 10^{9}\ \mathrm{m} \approx 8.48\ \mathrm{R}_\odot} \tag{0.9}$$

entspricht.

(d) Ein Winkeldurchmesser $\varphi = 9.84 \times 10^{-12}$ rad entspricht zusammen mit (0.8) einem Abstand von etwa

$$\boxed{d = \frac{2r}{\varphi} \approx 1.20 \times 10^{21}\ \mathrm{m} \approx 38.9\ \mathrm{kpc} \quad .} \tag{0.10}$$

Aufgabe 03

(a) Sind $V_1(P), V_2(P)$ jeweils die gemessenen scheinbaren Helligkeiten der Cepheiden im LMC und NGC, $L_1(P), L_2(P)$ deren Leuchtkräfte und D_1, D_2 deren Beobachtungsabstände, so gilt zunächst

$$V_1(P) - V_2(P) = -\frac{5}{2}\log_{10}\left[\frac{L_1(P)}{L_2(P)}\frac{D_2^2}{D_1^2}\right] \tag{0.11}$$

Unter der Annahme dass beide Cepheidenklassen den gleichen Gesetzmäßigkeiten unterliegen, sprich $L_1(P) = L_2(P)$, so folgt aus (0.11)

$$\frac{D_1}{D_2} = e^{\frac{1}{5}(V_1(P)-V_2(P))} \tag{0.12}$$

Insbesondere darf $V_1(P) - V_2(P)$ nicht von P abhängen, und im Fall

$$V_i = \alpha_i \log_{10}\frac{P}{d} + \beta_i \tag{0.13}$$

ergibt sich $\alpha_1 = \alpha_2$. Beziehung (0.12) nimmt daher die Form

$$\frac{D_1}{D_2} = 10^{\frac{1}{5}(\beta_1-\beta_2)} \tag{0.14}$$

an. Aus der entsprechenden Graphik für NGC lässt sich ablesen $\beta_2 \approx 30.39$ mag, was zusammen mit $\beta_1 = 17.044$ mag auf das Abstandsverhältnis

$$\boxed{\frac{D_1}{D_2} \approx 0.0021} \tag{0.15}$$

führt. Unter Beachtung von $D_1 = 50$ kpc folgt hieraus

$$\boxed{D_2 \approx 23.8 \text{ Mpc} \quad .} \tag{0.16}$$

Bei einer Fluchtgeschwindigkeit von $H_o D_2 = 1441 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, entspricht dies einer Hubble-Konstante von

$$\boxed{H_o \approx 1.96 \times 10^{-18} \text{ Hz} \quad .} \tag{0.17}$$

(b) Durch

$$V_1(P) - M(P) = -\frac{5}{2}\log_{10}\left[\frac{10 \text{ pc}}{D_1}\right]^2 = 5\log_{10}\frac{D_1}{10 \text{ pc}} \tag{0.18}$$

ergibt sich für Cepheiden im LMC ($D_1 \approx 50$ kpc) die Perioden-Helligkeits-Beziehung

$$V_1(P) \approx M(P) + 5\log_{10}\frac{50 \text{ kpc}}{10 \text{ pc}} \approx -2.81\log_{10}\frac{P}{10} + 17.065 \tag{0.19}$$

Die im Aufgabenteil (a) bestimmte Hubble Zahl würde sich auf den Wert $H_o \approx 2.06 \times 10^{-18}$ Hz minimal erhöhen. Im Bereich der vorhandenen Genauigkeit ist diese Änderung bedeutungslos.

Aufgabe 04

(a) Bekanntlich wird der EdS Kosmos ($p = 0, \varepsilon = 0$) beschrieben durch

$$R(t) = \sqrt[3]{6\pi G\mu_o R_o^3/c^2}\cdot(ct)^{\frac{2}{3}} = R_o \cdot \sqrt[3]{\frac{9H_o^2}{4}}\cdot t^{\frac{2}{3}} \tag{0.20}$$

wobei $\mu_o = 3H_o^2/(8\pi G)$ gerade der kritischen Massendichte entspricht. Radiale Nullgeodäten (Lichtbahnen) erfüllen $\frac{d\chi}{dt} = \frac{c}{R(t)}$, so dass sich eine innerhalb des Weltalters t_o zurückgelegte Strecke von

$$\chi_{\max} = \int_0^{t_o} \frac{cdt}{R(t)} \overset{(0.20)}{=} \frac{3c}{R_o}\sqrt[3]{\frac{4t_o}{9H_o^2}} \tag{0.21}$$

ergibt. Daher sind heute ($t = t_o$) genau die Sterne zu sehen, deren Radialabstand höchstens

$$D_{0,\max} = R_o \cdot \chi_{\max} = 3c \cdot \sqrt[3]{\frac{4t_o}{9H_o^2}} \tag{0.22}$$

beträgt. Aus (0.20) ergibt sich $H(t) = \dot{R}/R = 2/(3t)$ und man erhält die Kurzform

$$D_{0,\max} = \frac{2c}{H_o} \tag{0.23}$$

Die beobachtete Flussdichte dF einer Quelle der Leuchtkraft dL im Radialabstand $D_o := D(t_o)$, erhält man bekanntlich gemäß

$$dF = \frac{L}{4\pi D_L^2} = \frac{dL}{4\pi D_o^2(1+z)^2} \quad , \tag{0.24}$$

wobei z die entsprechende Rotverschiebung sei. Über die Mattig-Formel

$$D_L = \frac{c}{H_o q_o^2}\left[q_o z + (1-q_o)\left(1-\sqrt{1+2q_o z}\right)\right] \tag{0.25}$$

erhält man für einen EdS-Kosmos ($q_o = 1/2$)

$$(1+z) = \left[1 - \frac{H_o D_o}{2c}\right]^{-2} \quad , \tag{0.26}$$

so dass (0.24) die Form

$$dF = \frac{dL}{4\pi D_o^2}\left[1 - \frac{H_o D_o}{2c}\right]^4 \tag{0.27}$$

annimmt.

Sei nun $L := dL/dN$ die Leuchtkraft pro Stern und $n_o := dN/dV$ die heutige, räumlich konstante Sternanzahl pro Volumen. Angesichts (0.23) und (0.27), erhält man eine beobachtete Gesamtflussdichte von

$$F_o = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\chi_{\max}} d\varphi\, d\vartheta\, d\chi\, (R_o^3\chi^2 \sin\vartheta) \cdot \frac{dF}{dL}\frac{dL}{dN}\frac{dN}{dV}$$

$$\overset{(0.27)}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{D_{0,\max}} d\varphi\, d\vartheta\, dD_o\, (D_o^2 \sin\vartheta) \cdot \frac{Ln_o}{4\pi D_o^2}\left[1 - \frac{H_o D_o}{2c}\right]^4 \qquad \Bigg| \qquad D_o = \chi R_o$$

$$= \frac{2c}{H_o} Ln_o \underbrace{\int_0^1 [1-u]^4\, du}_{1/5} = \frac{2cLn_o}{5H_o} \qquad \Bigg| \qquad u := \frac{H_o D_o}{2c} \tag{0.28}$$

sprich

$$\boxed{F_o = \frac{2cLn_o}{5H_o}} \tag{0.29}$$

Für den Fall $n_o = 7.14 \times 10^{-10}\ \mathrm{Lj}^{-3}$, $L = 3.9 \times 10^{26}$ W und $H_o = 70\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1} \cdot \mathrm{Mpc}^{-1}$ erhält man

$$\boxed{F_o \approx 1.74 \times 10^{-5}\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2} \approx 1.24 \times 10^{-8}\ \mathrm{F}_\odot} \tag{0.30}$$

(b) Seien nun $n(t)$ und $H(t)$ jeweils die Sterndichte und Hubble-Zahl zu irgendeinem Zeitpunkt t. Dann gilt einerseits

$$n(t) = n_o \cdot \frac{R_0^3}{R^3(t)} \tag{0.31}$$

Anderseits erhält man durch $H \sim t^{-1} \sim R^{-\frac{3}{2}}$ die Beziehung

$$H(t) = H_o \cdot \left[\frac{R_o}{R(t)}\right]^{\frac{3}{2}} \tag{0.32}$$

so dass sich die Flussdichte (0.29) zu beliebiger Zeit t ergibt als

$$F(t) = F_o \cdot \left[\frac{R_o}{R(t)}\right]^{\frac{3}{2}} \overset{(0.20)}{=} \frac{F_o}{t} \cdot \sqrt{\frac{4}{9H_o^2}} \quad . \tag{0.33}$$

An dem Zeitpunkt wo $F(t) = F_\odot$, besitzt die Welt das Alter

$$\boxed{t = \frac{F_o}{F_\odot} \cdot \frac{2}{3H_o} \quad .} \tag{0.34}$$

Für obige vorliegenden Daten und $F_\odot = 1.4 \times 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$, erhält man

$$\boxed{t \approx 115 \text{ a}} \tag{0.35}$$

Insbesondere nimmt die Nachthimmelshelligkeit linear mit der Zeit ab.

(c) In einem statischen, Euklidischen Universum mit Sterndichte n_o und Stern-Leuchtkraft L, entspricht den Sternen innerhalb der $D_{0,\max}$-Kugel eine Flussdichte

$$F_o = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{D_{o,\max}} d\varphi \; d\vartheta \; dD_o \; (D_o^2 \sin\vartheta) \; \frac{Ln_o}{4\pi D_o^2} = Ln_o \cdot D_{0,\max} \tag{0.36}$$

Bei einer Stern-Lebensdauer $T := D_{0,\max}/c$ entspricht (0.36) genau der gesamten Nachthimmelshelligkeit, das heißt

$$\boxed{T = \frac{F_o}{Ln_o c} \overset{(0.29)}{=} \frac{2}{5H_o}} \tag{0.37}$$

Speziell für obige Parameter, erhält man eine Lebensdauer von

$$\boxed{T \approx 5.59 \times 10^9 \text{ a}} \tag{0.38}$$