Kosmologie
FSU Jena - SS 2010
Serie 04 - Lösungen

Stilianos Louca

June 16, 2010

Aufgabe 01

(a) Aus

$$\frac{d}{dR}(\mu R^3) = \frac{dt}{dR}\frac{d}{dt}(\mu R^3) = \frac{1}{\dot{R}} \cdot \left(\dot{\mu} R^3 + 3\mu R^2 \dot{R}\right) = \frac{R^3}{\dot{R}}\left(\dot{\mu} + 3\mu\frac{\dot{R}}{R}\right) \tag{0.1}$$

wird ersichtlich, dass die DGL

$$\frac{d}{dR}(\mu R^3) = -\frac{3pR^2}{c^2} \tag{0.2}$$

äquivalent ist zu

$$\dot{\mu} + 3\mu\frac{\dot{R}}{R} + 3\frac{p}{c^2}\frac{\dot{R}}{R} = 0 \tag{0.3}$$

was zum ersten zu zeigen war. Aus (0.2) folgt auch sofort

$$-3\frac{pR^2}{c^2} = \frac{d\mu}{dR}R^3 + 3\mu R^2 \tag{0.4}$$

bzw.

$$\frac{d\mu}{dR} = -\frac{3\mu}{R}\left[1 + \frac{p}{\mu c^2}\right] = -\frac{3\mu}{R}(1+w) \tag{0.5}$$

Die DGL (0.5) lässt sich durch Trennung der Variablen leicht lösen und ergibt

$$\boxed{\mu = \mu_0 \cdot \left[\frac{R_0}{R}\right]^{3(1+w)}} \tag{0.6}$$

mit $\mu(R_0) \stackrel{!}{=} \mu_0$ als Anfangsbedingung.

(b) Aus (0.6) lässt sich direkt ablesen:

$$\Omega = \frac{8\pi G}{3H^2}\mu = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\mu_0\left[\frac{H_0}{H}\right]^2 \cdot \left[\frac{R_0}{R}\right]^{3(1+w)} = \Omega_0 \cdot \left[\frac{H_0}{H}\right]^2 \cdot \left[\frac{R_0}{R}\right]^{3(1+w)} \tag{0.7}$$

Aufgabe 02

(a) Zum einen ist aus (0.7) abzulesen:

$$\left[\frac{H_o}{H_e}\right]^2 = \frac{\Omega_e}{\Omega_o} \cdot \left[\frac{R_e}{R_o}\right]^{3(1+w)} \tag{0.8}$$

Zum anderen folgt aus der Friedmann Gleichung

$$\left[\frac{H_o}{H_e}\right]^2 = \frac{R_e^2}{R_o^2}\frac{(1-\Omega_e)}{(1-\Omega_o)} \tag{0.9}$$

Vergleich von (0.8) und (0.9) liefert sofort

$$\frac{1}{\Omega_e} - 1 = \left[\frac{1}{\Omega_o} - 1\right] \cdot \left[\frac{R_e}{R_o}\right]^{1+3w} \tag{0.10}$$

Unter Verwendung der Rotverschiebungsbeziehung $1 + z = R_o/R_e$ schließlich

$$\boxed{\frac{1}{\Omega_e} - 1 = \left[\frac{1}{\Omega_o} - 1\right] \cdot \frac{1}{(1+z)^{1+3w}}} \tag{0.11}$$

(b) Unter Verwendung von (0.8) lässt sich schreiben

$$\Omega_o = \Omega_e \left[\frac{H_e}{H_o}\right]^2 \cdot \left[\frac{R_e}{R_o}\right]^{3(1+w)} \tag{0.12}$$

Einsetzen von (0.12) in (0.9) führt auf

$$\left[\frac{H_o}{H_e}\right]^2 = \left[\frac{R_e}{R_o}\right]^2 (1-\Omega_e) + \Omega_e \left[\frac{R_e}{R_o}\right]^{3(1+w)} \tag{0.13}$$

und unter Verwendung von $1 + z = R_o/R_e$ auf

$$\boxed{\left[\frac{H_o}{H_e}\right]^2 = (1+z)^{-2}(1-\Omega_e) + \Omega_e(1+z)^{-3(1+w)}} \tag{0.14}$$

(c) Im Spezialfall eines Einstein-de-Sitter Kosmos ($\varepsilon = 0$ bzw. $\Omega_e = 1$, $w = 0$) nimmt (0.14) die Form

$$\left[\frac{H_o}{H_e}\right]^2 = (1+z)^{-3} \tag{0.15}$$

an. Im Falle eines Staubkosmos ($w = 0$) nimmt (0.14) die Form

$$\left[\frac{H_o}{H_e}\right]^2 = (1+z)^{-2}(1-\Omega_e) + \Omega_e(1+z)^{-3} \tag{0.16}$$

an. Im Falle eines Strahlungskosmos ($w = 1/2$), nimmt (0.14) die Form

$$\left[\frac{H_o}{H_e}\right]^2 = (1+z)^{-2}(1-\Omega_e) + \Omega_e(1+z)^{-4} \tag{0.17}$$

an. Im Falle eines Vakuumkosmos ($w = -1$), nimmt (0.14) die Form

$$\left[\frac{H_o}{H_e}\right]^2 = (1+z)^{-2}(1-\Omega_e) + \Omega_e \tag{0.18}$$

an.

(d) Formel (0.11) kann umgeschrieben werden als

$$\Omega_o = \frac{\Omega_e}{\Omega_e + (1-\Omega_e)(1+z)^{1+3w}} \tag{0.19}$$

Im Falle von Staub ($w = 0$) und $\Omega_e = 1.0004,\ z = 1089$ erhält man den heutigen Wert von

$$\Omega_o \approx 1.77 \tag{0.20}$$

Im Falle $\Omega_e = 0.9996$ erhält man

$$\Omega_o \approx 0.696 \tag{0.21}$$

Aus den beiden Beispielen ist zu erkennen, dass die kleinste Abweichung des Dichteparameters vom Wert 1 zu früheren Zeiten, zu einer enormen Abweichung heutzutage führen würde. Die Tatsache dass der Wert heute nahe um 1 liegt, impliziert dass Ω zu früheren Zeiten noch viel näher dran war.

Aufgabe 03

(a) Aus den bekannten Darstellungen

$$D_o = \chi R(t_o) \quad , \quad D_e = \chi R(t_e) \quad , \quad D_L = r(\chi) R(t_o)(1+z) \tag{0.22}$$

ergeben sich für einen Einstein de Sitter (EdS) Kosmos ($\varepsilon = 0,\ r = \chi,\ \Omega = 1,\ q = \frac{1}{2}$) die Beziehungen

$$D_o = \frac{D_L}{1+z} \quad , \quad D_e = \frac{D_o}{1+z} = \frac{D_L}{(1+z)^2} \tag{0.23}$$

Anderseits nimmt die Mattig Formel

$$D_L = \frac{c}{H_o q_o^2}\left[q_o z + (1-q_o)\left(1 - \sqrt{1+2q_o z}\right)\right] \tag{0.24}$$

mit Hilfe von (0.15) die Spezialform

$$D_L = \frac{2c}{H_o}\left[1 + z - \sqrt{1+z}\right] \overset{(0.15)}{=} \frac{2c}{H_e}(1+z)^2\left[\sqrt{1+z} - 1\right] \tag{0.25}$$

an, so dass man schließlich die Darstellungen

$$\boxed{D_o = \frac{2c}{H_e}(1+z)\left[\sqrt{1+z} - 1\right] \quad , \quad D_e = \frac{2c}{H_e}\left[\sqrt{1+z} - 1\right]} \tag{0.26}$$

bzw.

$$\boxed{D_o = \frac{2c}{H_o}\left[1 - (1+z)^{-\frac{1}{2}}\right] \quad , \quad D_e = \frac{2c}{H_o}(1+z)^{-\frac{3}{2}}\left[\sqrt{1+z} - 1\right]} \tag{0.27}$$

erhält. Obige Beziehungen sind in Abb. 0.1 graphisch dargestellt.

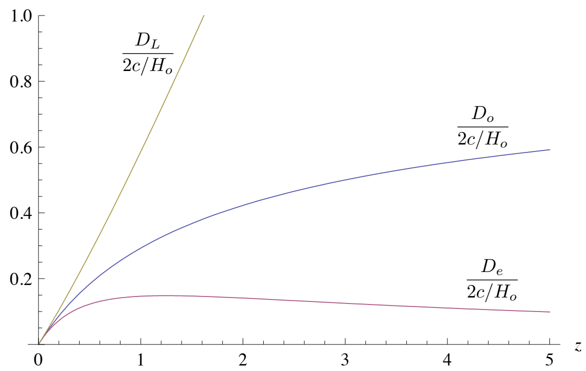

Figure 0.1: Zur Aufgabe 03(a): Entfernungen D_L, D_o, D_e im Einstein-de-Sitter Kosmos, in Abhängigkeit von der beobachteten Rotverschiebung z. Für $z \to \infty$, konvergiert $D_o \to 2c/H_o,\ D_e \to 0$ und $D_L \to \infty$.

Die Fluchtgeschwindigkeiten v_o, v_e erhält man durch $v_o = H_o D_o$ bzw. $v_e = H_e D_e$, gemäß

$$\boxed{v_o \overset{(0.27)}{=} 2c\left[1-(1+z)^{-\frac{1}{2}}\right] \quad , \quad v_e \overset{(0.26)}{=} 2c\left[\sqrt{1+z}-1\right]} \tag{0.28}$$

Deren Verlauf ist in Abb. 0.2 graphisch dargestellt.

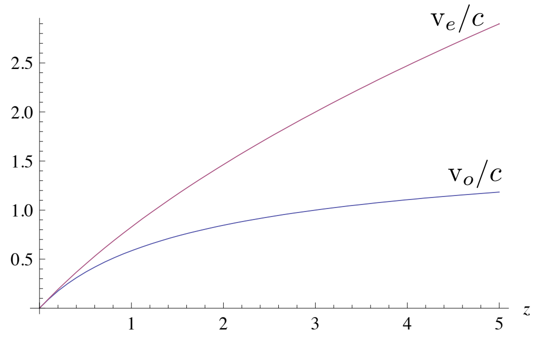

Figure 0.2: Zur Aufgabe 03(a): Fuchtgeschwindigkeiten v_o/c und v_e/c im Einstein-de-Sitter Kosmos, in Abhängigkeit von der beobachteten Rotverschiebung z. Für $z \to \infty$, konvergiert $v_e \to \infty$ und $v_o \to 2c$.

(b) Entwicklung von (0.25) und (0.27) in z liefert

$$D_L = \frac{c}{H_o}\left[z+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\mathcal{O}(z^4)\right] = \frac{c}{H_o}\left[z+\frac{z^2}{2}(1-q)+\mathcal{O}(z^3)\right]$$

$$D_o = \frac{c}{H_o}\left[z-\frac{3z^2}{4}+\frac{5z^3}{8}+\mathcal{O}(z^4)\right] = \frac{c}{H_o}\left[z-\frac{z^2}{2}(1+q)+\mathcal{O}(z^3)\right]$$

$$D_e = \frac{c}{H_o}\left[z-\frac{7z^2}{4}+\frac{19z^3}{8}+\mathcal{O}(z^4)\right] = \frac{c}{H_o}\left[z-\frac{z^2}{2}(3+q)+\mathcal{O}(z^3)\right] \tag{0.29}$$

in voller Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus Serie 02, Aufgabe 02.

(c) Entwicklung von (0.28) in z liefert

$$v_o = cz - \frac{3c}{4}z^2 + \frac{5c}{8}z^3 + \mathcal{O}(z^4)$$

$$v_e = cz - \frac{c}{4}z^2 + \frac{c}{8}z^3 + \mathcal{O}(z^4) \quad . \tag{0.30}$$

Andererseits liefert die speziell-relativistische Formel

$$z = \sqrt{\frac{1+v_{e,d}/c}{1-v_{e,d}/c}} - 1 \tag{0.31}$$

für die Doppler-Verschiebung, den Ausdruck

$$v_{e,d} = c \cdot \frac{(1+z)^2-1}{(1+z)^2+1} = cz - \frac{c}{2}z^2 + \mathcal{O}(z^4) \quad . \tag{0.32}$$

Der Vergleich mit (0.30) offenbart, dass (0.32) vom Tatsächlichen v_e (in 2. Ordnung) genauso stark abweicht, wie eine Näherung 1. Ordnung von (0.30).

Aufgabe 04

(a) Mit den Definitionen

$$q := -\frac{1}{H^2}\frac{\ddot{R}}{R} \quad , \quad H := \frac{\dot{R}}{R} \tag{0.33}$$

kann die Beschleunigungsgleichung

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\varepsilon c^2 + \dot{R}^2}{R^2} = -\varkappa p c^2 \tag{0.34}$$

umgeschrieben werden in

$$-2H^2 q + \frac{\varepsilon c^2}{R^2} + H^2 = -\varkappa p c^2 \tag{0.35}$$

Mit Hilfe der Friedmann Gleichung

$$\frac{\varepsilon c^2}{R^2} + H^2 = \Omega H^2 \tag{0.36}$$

und den Definitionen

$$w := \frac{p}{\mu c^2} \quad , \quad \Omega := \frac{\varkappa \mu c^4}{3H^2} \tag{0.37}$$

lässt sich (0.35) umschreiben in

$$2H^2 q \overset{(0.36)}{=} \varkappa p c^2 + \Omega H^2 \overset{(0.37)}{=} \Omega H^2 (3w + 1) \tag{0.38}$$

bzw.

$$\boxed{2q = \Omega(1 + 3w)} \tag{0.39}$$

Im Spezialfall von Staub ($w = 0$) erhält man $2q = \Omega$. Im Spezialfall von Strahlung ($w = 1/3$) erhält man $q = \Omega$.

Aus (0.37) ist ersichtlich, dass bei gleicher Massendichte μ und Hubble Zahl H_0 die Dichteparameter der beiden Kosmen übereinstimmen. Nach obigen Überlegungen folgt dann die Beziehung

$$2q_{\text{staub}} = q_{\text{stralung}} \tag{0.40}$$

zwischen den jeweiligen Verzögerungsparametern.

(b) Aus der Friedmann Gleichung

$$\frac{3}{R^2}(\varepsilon c^2 + \dot{R}^2) = \varkappa \mu c^4 \tag{0.41}$$

ist abzulesen, dass im Falle $\varepsilon = +1$ der maximale erreichbare Weltradius ($\dot{R} \overset{!}{=} 0$) durch

$$R^2_{\text{max}} = \frac{3}{\varkappa \mu c^2} \tag{0.42}$$

gegeben ist. Beachtet man die Energiebilanz $\mu R^4 = \text{const}$ für Strahlungskosmen, so lässt sich (0.42) auch schreiben als

$$\boxed{R^2_{\text{max}} = \frac{\varkappa c^2}{3}\mu_0 R_0^4} \tag{0.43}$$

Unter Verwendung der Friedmann Gleichung (0.36) und der Definition (0.37) für Ω lässt sich R_0 durch H_0 und μ_0 ersetzen, so dass man schließlich

$$\boxed{R^2_{\text{max}} = \frac{3\varkappa \mu_0 c^6}{(\varkappa \mu_0 c^4 - 3H_0^2)^2}} \tag{0.44}$$

erhält.

Unter Verwendung der Entwicklungsgleichung

$$R^2(t) = -c^2t^2 + 2c^2tR_0^2 \cdot \sqrt{\frac{\varkappa\mu_0}{3}} \tag{0.45}$$

(Anfangsbedingung $R(0) = 0$) für Strahlungskosmen im Falle $\varepsilon = +1$, erhält man durch Nullstellensuche der Ableitung von R^2 den Zeitpunkt der maximalen Expansion:

$$\boxed{t_{\text{max}} = R_0^2 \cdot \sqrt{\frac{\varkappa\mu_0}{3}} = \frac{R_{\text{max}}}{c}} \tag{0.46}$$

Alternativ könnte R_{max} auch durch einsetzen von (0.46) in (0.45) bestimmt werden.

Staubkosmen: Aus der allgemeinen Beziehung (0.42) und der Energiebilanz $\mu R^3 = \text{const}$ für Staubkosmen, erhält man

$$R_{\text{max}}^{\text{Staub}} = \frac{\varkappa c^2}{3}\mu_0 R_0^3 \tag{0.47}$$

Unter Verwendung der parametrisierten Entwicklungsgleichungen

$$R(t) = \frac{\varkappa c^2}{6}\mu_0 R_0^3(1 - \cos\eta)$$

$$ct = \frac{\varkappa c^2}{6}\mu_0 R_0^3 \,(\eta - \sin\eta) \tag{0.48}$$

(Anfangsbedingung $R(0) = 0$) für Staubkosmen im Fall $\varepsilon = +1$, lässt sich durch Vergleich mit (0.47) die Expansionszeit

$$\boxed{t_{\text{max}}^{\text{Staub}} = \frac{\pi}{6}\varkappa c\mu_0 R_0^3 = \frac{\pi}{2c}R_{\text{max}}^{\text{Staub}}} \tag{0.49}$$

bestimmen (entspricht $\eta = \pi$).

Vergleich: Aus (0.49) und (0.46) erhält man für Staub- & Strahlungskosmen mit gleichem Maximalradius, ein Expansionszeit-Verhältnis von

$$\boxed{\frac{t_{\text{max}}^{\text{Staub}}}{t_{\text{max}}^{\text{Str}}} = \frac{\pi}{2}} \tag{0.50}$$