Kosmologie
FSU Jena - SS 2010
Serie 03 - Lösungen

Stilianos Louca

July 19, 2010

Aufgabe 01

Die Kugelsymmetrie der Massenverteilung impliziert die Kugelsymmetrie des resultierenden Potentials $U(\mathbf{r}) = U(r)$ und Kraft $F = F(r)\mathbf{e}_r$. In Kugelkoordinaten lautet also die entsprechende Poisson-Gleichung

$$4\pi G\mu(r) = \Delta U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) \tag{0.1}$$

Insbesondere ist aufgrund der Kugelsymmetrie zu erwarten dass im Zentrum die Gesamtkraft $-m\partial_r U$ verschwindet (oder zumindest endlich bleibt), so dass gilt

$$r^2\frac{\partial U}{\partial r} = \int_0^r \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\frac{\partial U(\rho)}{\partial \rho}\right)\,d\rho = \int_0^r 4\pi G\mu(\rho)\rho^2\,d\rho =: GM(r) \tag{0.2}$$

bzw.

$$\boxed{F(r) = -m\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{GmM(r)}{r^2}} \tag{0.3}$$

wobei $M(r)$ genau die Masse ist, die sich in den *inneren Schichten* befindet ($\|\mathbf{x}\| \leq r$). Insbesondere ist $M(r) = M$ für $r \geq R$, sprich das äußere Kraftfeld der Kugel entspricht dem einer Punktmasse $M\delta(\mathbf{x})$ im Zentrum. Unter der Bedingung dass das Potential im Unendlichen verschwindet, erhält man schließlich

$$\boxed{U(r) = \int_\infty^r \frac{GM(r)}{r^2}\,dr} \tag{0.4}$$

Aufgabe 02

(a) Aus der Geschwindigkeit

$$v := \frac{dr}{dt} = \chi\dot{R} = \chi R\cdot\frac{\dot{R}}{R} \overset{!}{=} H\cdot r \tag{0.5}$$

lässt sich direkt der Hubble-Parameter H in voller Analogie zum Robertson-Walker-Modell gemäß

$$H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \tag{0.6}$$

ablesen.

(b) Aus (0.6) ist abzulesen $\ddot{R} = \dot{H}R + H\dot{R}$, so dass man direkt erhält

$$\ddot{r} = \chi\ddot{R} = \frac{r}{R} \cdot \ddot{R} = r \cdot \left[\dot{H} + H\frac{\dot{R}}{R}\right] = r \cdot \underbrace{\left[\dot{H}(t) + H^2(t)\right]}_{f(t)} \tag{0.7}$$

Zu erkennen ist, dass die Expansion genau dann verzögert verläuft, wenn $\dot{H} < -H^2$.

(c) Interpretiert man $T := \frac{m}{2}\dot{r}^2$ als *kinetische Energie* der Galaxie, so ergibt sich die Bilanzgleichung

$$\frac{d}{dt}\left[T + mfr^2\right] = m\dot{r} \cdot \underbrace{\ddot{r}}_{fr} + m\frac{d}{dt}\left[\frac{fr^3}{r}\right] = \cancel{mfr\dot{r}} + \cancel{mfr^3\frac{d}{dt}\frac{1}{r}} + \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(fr^3) = \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(fr^3) \tag{0.8}$$

Eine weitere Bilanzgleichung ergibt sich aus

$$\frac{d}{dt}\left[T - \frac{m}{2}fr^2\right] = m\dot{r}\underbrace{\ddot{r}}_{fr} - \frac{m}{2}\dot{f}r^2 - mfr\dot{r} = -\frac{m}{2}r^2\frac{df}{dt} \tag{0.9}$$

Aufgabe 03

(a) Nach Aufgabe (01) wirkt auf die Galaxie die radiale Kraft

$$F = -\frac{mGM(t,r)}{r^2} \tag{0.10}$$

erzeugt durch die Gesamtmasse $M(t,r)$ der inneren Schichten. Diese ist wiederum gegeben durch $M(t,r) = \frac{4\pi}{3}r^3\mu(t)$, so dass man die Beschleunigung der Galaxie gemäß

$$\ddot{r} = \frac{F(t,r)}{m} = \underbrace{-\frac{4\pi}{3}G\mu(t)}_{f(t)} \cdot r \tag{0.11}$$

erhält.

(b) Aus (0.11) ist direkt abzulesen:

$$f(t) = -\frac{4\pi}{3}G\mu(t) \tag{0.12}$$

Da $f(t) \leq 0$, verläuft die Galaxienbewegung verzögert.

(c) Nimmt man die Massenerhaltung an, so sollte sich in einer Kugel vom Radius $\chi R(t)$ stets die gleiche Gesamtmasse $M(t, \chi R(t))$ befinden, sprich

$$R^3(t) \cdot \mu(t) = \text{const} \tag{0.13}$$

bzw. $fr^r = \text{const}$. Nach (0.8) folgt hieraus sofort der Erhaltungssatz

$$\dot{E} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{r}^2 + mfr^2\right) = \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(fr^3) = 0 \tag{0.14}$$

sprich $E = \text{const}$. Aus (0.14) folgt nun schließlich

$$\dot{R}^2 = \frac{\dot{r}^2}{\chi^2} = \frac{2}{m\chi^2} \cdot \left[E + \frac{4\pi}{3}Gm\mu(t)r^2\right] = \frac{2E}{m\chi^2} + \frac{8\pi G}{3c^2} \cdot \frac{c^2\mu(t)r^3}{\chi^2 r}$$

$$= -\underbrace{\left[-\frac{2E}{mc^2\chi^2}\right]}_{\varepsilon} \cdot c^2 + \frac{8\pi G}{3c^2} \cdot \underbrace{\frac{c^2\mu(t)r^3}{\chi^3}}_{=:\widetilde{M}:\text{const}} \cdot \frac{1}{R} = \frac{8\pi G}{3c^2}\frac{\widetilde{M}}{R} - \varepsilon c^2 \quad . \tag{0.15}$$

Aufgabe 04

(a) Aus der Energiebilanz (0.14), sprich

$$E = \underbrace{\frac{m}{2}\dot{r}^2}_{\text{kinetische}} - \underbrace{\frac{4\pi\mu(t)r^3}{3} \cdot \frac{Gm}{r}}_{\text{potentielle}} \quad : \text{const} \tag{0.16}$$

lässt sich das kosmische Potential

$$U_{\text{kos}}(r) := -\frac{4\pi}{3} G m \mu(t) r^2 \tag{0.17}$$

abzulesen. Zusammen mit dem Gravitationsfeld von M_{lok}, ergibt sich das Gesamtpotential

$$U(r) = -\frac{Gm}{r}\left[M_{\text{lok}} + M_{\text{kos}}(r)\right] \tag{0.18}$$

mit $M_{\text{kos}}(t,r) := \frac{4\pi}{3}\mu(t)r^3$.

(b) Ein Massenpunkt m im Abstand r, mit Geschwindigkeit $\dot{r}$ kann genau dann **nicht** ins unendlich entweichen, wenn seine Gesamtenergie $E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U(r)$ negativ ist (siehe Abb. (0.1)), das heißt[1]

$$\frac{\dot{r}^2}{2} \overset{!}{\leq} \frac{G}{r}\left[M_{\text{lok}} + \frac{4\pi}{3}\mu(t)r^3\right] \tag{0.19}$$

Mit der Beziehung $\dot{r} = Hr$ lässt sich (0.19) schreiben als

$$\frac{1}{r^3} \geq \frac{3H^2(t) - 8\pi G\mu(t)}{6GM_{\text{lok}}} \tag{0.20}$$

mit $H(t)$ als aktuellen Hubble-Parameter des Kosmos. Im Falle $3H^2 \leq 8\pi G\mu$ entweicht **kein** Himmelskörper ins unendliche. Anderseits sind nur die Himmelskörper im Abstand

$$r \leq \sqrt[3]{\frac{6GM_{\text{lok}}}{3H^2 - 8\pi G\mu}} =: \hat{r} \tag{0.21}$$

gebunden.

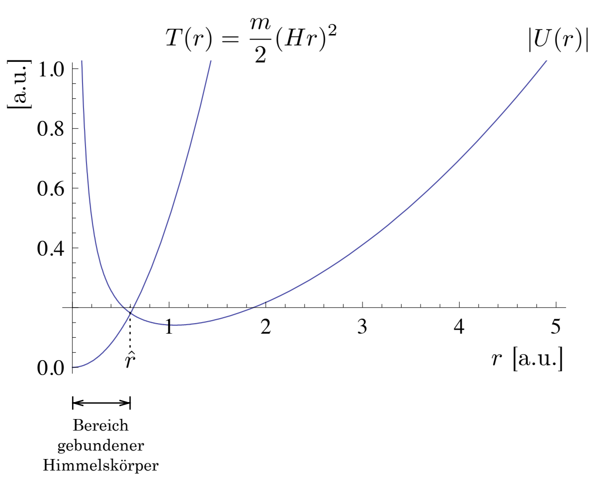

Figure 0.1: Zur Aufgabe 04(b): Typischer Verlauf der kinetischen und potentiellen Energie (pro Masse) von Himmelskörpern, die momentan in der mitlaufenden Koordinate χ ruhen. Verwendete Parameter waren $H = 1$, $M_{\text{lok}} = 0.1$, $\mu = 0.1$, $G = 1$.

[1] Beachte dass für den Massenpunkt auf Bahn $r(t)$ gilt: $M_{\text{kos}}(t, r(t))$: const.

(c) Bei einem Hubble-Parameter von $H \approx 2.27 \times 10^{-12}$ s^{-1} und einer Dichte von $\mu \approx 1.1 \times 10^{-37}$ s$^{-2} \cdot$ G^{-1} erhält man den Grenzradius

$$\hat{r} = \sqrt[3]{\frac{M_{\mathrm{lok}}}{M_\odot}} \cdot 0.012 \text{ pc} \tag{0.22}$$

Im Falle $M_{\mathrm{lok}} = 1.8 \times 10^{11}$ M$_\odot$ und $M_{\mathrm{lok}} = 6.5 \times 10^{11}$ M$_\odot$ ergeben sich jeweils die Grenzradien $\hat{r} \approx 68$ pc und $\hat{r} \approx 104$ pc.[2]

[2] Der Durchmesser der Milchstraße beträgt ca. 30 kpc.