Kosmologie
FSU Jena - SS 2010
Serie 02 - Lösungen

Stilianos Louca

June 2, 2010

Aufgabe 01

(a) Betrachten zwei Photonen auf den Weltlinien $\gamma_i = (r_i, \vartheta_i, \varphi_i, t_i),\ i = 1,2$ jeweils parametrisiert durch τ_1, τ_2, die zur gleichen Koordinatenzeit $t = t_o$ am Beobachter O ankommen. O.B.d.A. können wir annehmen $t_1(0) = t_2(0) = t_o$. Die Weltlinien sollen radial verlaufen, das heißt $\vartheta_i = \text{const}$ und o.B.d.A. $\varphi_i = 0 : \text{const}$. Aus ÜS 01 (bzw. den Geodätengleichungen), ergibt sich dass die Differentialgleichungen für $\frac{dr_1}{dt_1}$ und $\frac{dr_2}{dt_2}$ nicht von ϑ_i, φ_i abhängen und insbesondere identisch sind, so dass $r_1(\tau_1) = r_2(\tau_2)$ genau dann wenn $t_1(\tau_1) = t_2(\tau_2)$. Beachte dass $\delta := \vartheta_2 - \vartheta_1$ genau der Winkel zwischen den beiden Photonenrichtungen am Beobachter ist.

Passieren nun die beiden Photonen jeweils die Raumzeitpunkte $(r_0, \vartheta_i, 0, t_i)$ (*Extrema* der Galaxie), so muss nach obigen Überlegungen $t_1 = t_2 =: t_e$ sein. Die Verbindungskurve zwischen den beiden Punkten, die bei $r = r_0 : \text{const},\ \varphi = 0 : \text{const},\ t = t_e : \text{const}$ verläuft, besitzt die Länge

$$d = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{R^2(t_e) r_0^2}\ d\vartheta = R(t_e) r_0 \delta \quad . \tag{0.1}$$

(b) Die Leuchtkraft-Entfernung D_L ist bekanntlich gegeben durch

$$D_L = \frac{r_0 R^2(t_o)}{R(t_e)} = r_0 R(t_o)(1+z) \quad , \tag{0.2}$$

so dass

$$D_A D_L = r_0^2 \cdot R^2(t_o) \quad . \tag{0.3}$$

Alternativ kann man auch schreiben

$$D_L = D_A \frac{R(t_o)}{R(t_e)}(1+z) = D_A (1+z)^2 \quad . \tag{0.4}$$

(c) Aus Teil (a) wissen wir

$$D_A = r_0 R(t_e) = r_0 R(t_o) \cdot \frac{R(t_e)}{R(t_o)} = \frac{r_0 R(t_o)}{1+z} \tag{0.5}$$

mit der relativen Rotverschiebung z. In der kosmischen Nahzone ($\chi \ll 1$) ist $r_0 = r(\chi_o) = \chi_o + \mathcal{O}(\chi_o^3)$. Mit der bekannten Rotverschiebungs-Entfernungs-Relation[1]

$$H_o \underbrace{\chi_o R(t_o)}_{D(t_o)} = cz - \frac{c}{2}(1+q_o) z^2 + \mathcal{O}(z^3) \tag{0.6}$$

[1]Mit dem Hubble-Parameter $H := \frac{R'}{R}$ und Verzögerungsparameter $q := -\frac{1}{H^2}\frac{R''}{R}$.

erhält man schließlich

$$D_A \overset{(0.5)}{=} \frac{D(t_o)}{1+z} + \frac{\overbrace{\mathcal{O}(\chi_o^3)}^{\mathcal{O}(z^3)}}{1+z} = D(t_o)\cdot\left[1 - z + \mathcal{O}(z^2)\right] + \mathcal{O}(z^3) \overset{(0.6)}{=} \frac{cz}{H_o} - \frac{c}{2H_o}\left(3+q_o\right)z^2 + \mathcal{O}(z^3) \tag{0.7}$$

Aufgabe 02

(a) Wir notieren

$$D(t_o) = \frac{cz}{H_o} - \frac{c}{2H_o}(1+q_o)z^2 + \mathcal{O}(z^3)$$

$$D(t_e) = \chi R(t_e) = \underbrace{\chi R(t_o)}_{D(t_o)}\cdot\frac{R(t_e)}{R(t_o)} = \frac{D(t_o)}{1+z} \overset{(0.7)}{=} D_A + \mathcal{O}(z^3)$$

$$D_L = \frac{cz}{H_o} + \frac{c}{2H_o}(1-q_o)z^2 + \mathcal{O}(z^3)$$

$$D_A \overset{(0.7)}{=} \frac{D(t_o)}{1+z} + \mathcal{O}(z^3) = \frac{cz}{H_o} - \frac{c}{2H_o}(3+q_o)z^2 + \mathcal{O}(z^3)$$

und erhalten so

$$D(t_e) = D_A + \mathcal{O}(z^3) = D(t_o) - \frac{cz^2}{H_o} + \mathcal{O}(z^3) = D_L - \frac{2cz^2}{H_o} + \mathcal{O}(z^3) \tag{0.8}$$

Gesucht sei nun der Bereich der Rotverschiebungen z, für die sich die vier Entfernungen relativ um mehr als $\alpha \in [0,1]$ unterscheiden. Bis auf 2. Genauigkeitsordnung in z, ist dies der Fall genau dann wenn

$$\alpha \lesssim \frac{2cz^2/H_o}{D(t_o)} \approx \frac{2z^2}{z - \frac{z^2}{2}(1+q_o)} \approx 2z \tag{0.9}$$

sprich $z \gtrsim \alpha/2$. Bei $\alpha = 10\%$ entspräche dies einer Rotverschiebung von $z \gtrsim 20\%$. Bei einer Hubble-Zahl $H_o = 70\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{Mpc}^{-1}$ entspricht dies einer *Entfernung* von etwa 860 Mpc.

(b) Unter Verwendung der, in der Vorlesung hergeleiteten, Beziehung

$$z = H_o(t_o - t_e) + \frac{H_o^2}{2}\left(2+q_o\right)(t_o-t_e)^2 + \mathcal{O}((t_o-t_e)^3) \tag{0.10}$$

bzw. äquivalent dazu

$$z - \mathcal{O}(z^3) = H_o\Delta t + \frac{H_o^2}{2}\left(2+q_o\right)\Delta t^2 \qquad \Big| \qquad \Delta t := t_o - t_e \tag{0.11}$$

schreiben wir um

$$\Delta t = \frac{-H_o + \sqrt{H_o^2 + 2zH_o^2(2+q_o)}}{H_o^2(2+q_o)} + \mathcal{O}(z^3) = \frac{-1+\sqrt{1+2z(2+q_o)}}{H_o(2+q_o)} + \mathcal{O}(z^3)$$

$$= \frac{-1+1+\frac{1}{2}\cdot 2z(2+q_o) - \frac{1}{8}\cdot\left[2z(2+q_o)\right]^2}{H_o(2+q_o)} + \mathcal{O}(z^3)$$

$$= \frac{z}{H_o} - \frac{z^2}{H_o}\left(1+\frac{q_o}{2}\right) + \mathcal{O}(z^3) \tag{0.12}$$

Verwendet man nun die aus der Vorlesung bekannte Beziehung

$$z = \frac{H_o}{c} \cdot D(t_o) + \frac{H_o^2}{2c^2}(1+q_o) \cdot D^2(t_o) + \mathcal{O}(D^3(t_o)) \tag{0.13}$$

in (0.12), so erhält man schließlich

$$\begin{aligned}
\Delta t &= \frac{D(t_0)}{c} + \frac{H_o}{2c^2}(1+q_o)D^2(t_o) - \frac{(2+q_o)}{2H_o}\left[\frac{H_o}{c}D(t_o) + \frac{H_o^2}{2c^2}(1+q_o)D^2(t_o)\right]^2 \\
&\quad + \underbrace{\mathcal{O}(z^3)}_{\mathcal{O}(D^3(t_o))} + \mathcal{O}(D^3(t_o)) \\
&= \frac{D(t_o)}{c} - \frac{H_o}{2} \cdot \frac{D^2(t_o)}{c^2} + \mathcal{O}(D^3(t_o))
\end{aligned} \tag{0.14}$$

(c) Die Rotverschiebung z eines zum Zeitpunkt t_o beobachteten Photons, hängt zum einem von der (vergangenen) Entwicklung $R(t)$ und zum anderen von der zugrundeliegenden Emissionszeit t_e ab. Aus

$$R(t) = R(t_o)\left[1 - H(t_o)(t_o - t) - \frac{1}{2}q_o H_o (t_o - t)^2 + \mathcal{O}((t_o - t)^3)\right] \tag{0.15}$$

und

$$\dot{R}(t) = R(t_o)\left[H_o + q_o H_o^2 (t_o - t) + \mathcal{O}((t_o - t)^2)\right] \tag{0.16}$$

folgt

$$\begin{aligned}
H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} &= H_o \frac{1 + q_o H_o (t_o - t)}{1 - H_o(t_o - t)} + \mathcal{O}((t_o - t)^2) \\
&= H_o\left[1 + q_o H_o (t_o - t)\right]\left[1 + H_o(t_o - t)\right] + \mathcal{O}((t_o - t)^2) \\
&= H_o\big[1 + (1+q_o) \cdot \underbrace{H_o(t_o - t)}_{z + \mathcal{O}(z^2)}\big] + \underbrace{\mathcal{O}((t_o - t)^2)}_{\mathcal{O}(z^2)}
\end{aligned} \tag{0.17}$$

Folglich war der Hubble-Parameter H am Emissionszeitpunkt von z-rotverschobenen Photonen gegeben durch

$$H(z) = H_o\left[1 + (1+q_o) \cdot z\right] + \mathcal{O}(z^2) \quad . \tag{0.18}$$