Kosmologie
FSU Jena - SS 2010
Serie 01 - Lösungen

Stilianos Louca

July 18, 2010

Erinnerung

Für diagonale Metrik g sind die Christoffel-Symbole darstellbar durch

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0 \tag{0.1}$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\mu} = -\frac{\partial_\lambda g_{\mu\mu}}{2g_{\lambda\lambda}} \tag{0.2}$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} = \frac{\partial_\mu g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}} \tag{0.3}$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\lambda\lambda} = \frac{\partial_\lambda g_{\lambda\lambda}}{2g_{\lambda\lambda}} \tag{0.4}$$

wobei μ, ν, λ paarweise verschieden seien.

Aufgabe 01

(a) Aus der allgemeinen Darstellung

$$\Gamma^{\varkappa}_{\mu\nu} = \frac{g^{\varkappa\lambda}}{2}\left(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}\right) \tag{0.5}$$

ergibt sich für die Metrik $g = dr^2 + r^2 d\varphi^2$:

$$\Gamma^r_{rr} = \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} = \Gamma^\varphi_{rr} = \Gamma^r_{\varphi r} = \Gamma^r_{r\varphi} = 0$$

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r \quad , \quad \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{1}{r} \tag{0.6}$$

(b) Die allgemeinen Geodätengleichungen

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda}\dot{x}^\varkappa \dot{x}^\nu = 0 \tag{0.7}$$

nehmen für obige Metrik die Form

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = 0 \quad , \quad \ddot{\varphi} + 2\frac{\dot{r}\dot{\varphi}}{r} = 0 \tag{0.8}$$

an. Aus der 2. DGL, sprich

$$0 = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right)$$

erhält man sofort $r^2\dot\varphi = L$: const (Drehimpulserhaltung). Folglich gibt die 1. DGL aus (0.8)

$$0 = \ddot r - \frac{L^2}{r^3} = \frac{1}{2\dot r}\cdot\frac{d}{dt}\left(\dot r^2 + \frac{L^2}{r^2}\right) = \frac{1}{2\dot r}\cdot\frac{d}{dt}\left(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2\right) \quad ,$$

sprich $\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 = E$: const (Energieerhaltung). Bekanntlich bestimmen die Forderungen der Energieerhaltung ($\rightarrow$ Erhaltung des Geschwindigkeitsbetrages) & Drehimpulserhaltung ($\rightarrow$ Erhaltung der Bewegungsrichtung) in der Ebene vollständig die Trajektorie (geradlinig, gleichförmig) eines freien Teilchens gemäß der Newton Theorie.

Erläuterung: Die DGL $\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 = E$: const und $r^2\dot\varphi = L$: const sind äquivalent zu der ursprünglichen Geodätengleichung. Als deren Lösung erweist sich

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \arctan(Ct - b) \quad , \quad r(t) = \frac{r_m}{\cos(\varphi - \varphi_0)} = r_m\cdot\sqrt{1 + (Ct-b)^2} \quad , \quad C, b, \varphi_0, r_m : \text{const}$$

(mit $L = r_m^2 C$ und $E = r_m^2 C^2$). Doch diese entsprich genau einer geradlinigen Bewegung mit Geschwindigkeit $r_m C$, minimalen Ursprungsabstand r_m, Richtungswinkel $\varphi_0 + \pi/2$.

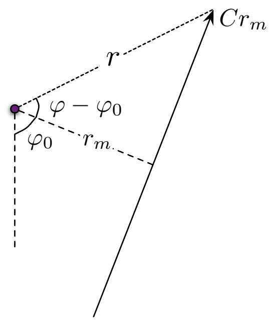

Figure 0.1: Zu geradlinigen Trajektorien in Polarkoordinaten

(c) Bekanntlich können Geodäten $\gamma = \gamma(s)$ auch durch den Lagrangian $\mathcal{L} = g(\dot\gamma, \dot\gamma)$ beschrieben werden. Dieser liefert in Polarkoordinaten die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$0 = \frac{d}{ds}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot r} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} = 2\ddot r - 2r\dot\varphi$$

$$0 = \frac{d}{ds}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \frac{d}{dt}\left(2r^2\dot\varphi\right)$$

$$0 = \frac{d}{ds}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot t} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = -2\frac{d}{dt}(c^2\dot t) \tag{0.9}$$

welche äquivalent zu den Gleichungen

$$r^2\dot\varphi = L : \text{const} \quad , \quad \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 = E : \text{const} \quad , \quad \dot t = T : \text{const} \tag{0.10}$$

sind (vgl. Teil (b)). Bekanntlich beschreibt dann $(r, \varphi)(s)$ eine gerade Linie in Polarkoordinaten.

Aufgabe 02

(a) Für die Metrik

$$g = R^2 d\vartheta^2 + R^2\sin^2\vartheta\; d\varphi^2 - c^2 dt^2 \tag{0.11}$$

erhält man die Christoffel-Symbole:

$$\Gamma^{\vartheta}_{\varphi t} = \Gamma^{\vartheta}_{t\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{t\vartheta} = \Gamma^{\varphi}_{\vartheta t} = \Gamma^{t}_{\varphi\vartheta} = \Gamma^{t}_{\vartheta\varphi} = 0$$

$$\Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta \quad , \quad \Gamma^{\vartheta}_{tt} = 0$$

$$\Gamma^{t}_{\varphi\varphi} = \Gamma^{t}_{\vartheta\vartheta} = \Gamma^{\varphi}_{\vartheta\vartheta} = \Gamma^{\varphi}_{tt} = 0$$

$$\Gamma^{\vartheta}_{\vartheta t} = \Gamma^{\vartheta}_{t\vartheta} = \Gamma^{\vartheta}_{\vartheta\varphi} = \Gamma^{\vartheta}_{\varphi\vartheta} = 0$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\varphi t} = \Gamma^{\varphi}_{t\varphi} = 0 \quad , \quad \Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi\vartheta} = \cot\vartheta$$

$$\Gamma^{t}_{\vartheta t} = \Gamma^{t}_{t\vartheta} = \Gamma^{t}_{\varphi t} = \Gamma^{t}_{t\varphi} = 0$$

$$\Gamma^{t}_{tt} = \Gamma^{\vartheta}_{\vartheta\vartheta} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi} = 0$$

(b) Der Riemann-Tensor

$$R^{\rho}{}_{\alpha\varkappa\nu} := \partial_{\varkappa}\Gamma^{\rho}_{\nu\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\varkappa\alpha} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\alpha}\Gamma^{\rho}_{\varkappa\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\varkappa\alpha}\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \tag{0.12}$$

ergibt sich für obige Metrik (0.11) als:

$$R^{\vartheta}{}_{\varphi\vartheta\varphi} = -R^{\vartheta}{}_{\varphi\varphi\vartheta} = \sin^2\vartheta$$

$$R^{\varphi}{}_{\vartheta\varphi\vartheta} = -R^{\varphi}{}_{\vartheta\vartheta\varphi} = 1$$

$$R^{\rho}{}_{\alpha\varkappa\nu} = 0 : \text{sonst}$$

Der Ricci-Tensor $R_{\mu\nu} := R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}$ ergibt sich als

$$R_{\vartheta\vartheta} = 1 \quad , \quad R_{\varphi\varphi} = \sin^2\vartheta \quad , \quad R_{\mu\nu} = 0 : \text{sonst} \tag{0.13}$$

woraus schließlich der Krümmungsskalar

$$\boxed{R = R^{\mu}{}_{\mu} = \frac{2}{r^2}} \tag{0.14}$$

folgt.

(c) Die allgemeinen Geodätengleichungen (0.7) nehmen für diese spezielle Metrik die Form

$$\ddot{\vartheta} - \dot{\varphi}^2 \sin\vartheta\cos\vartheta = 0 \quad , \quad \ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\cot\vartheta = 0 \quad , \quad \ddot{t} = 0 \tag{0.15}$$

an.

(d) Die Kurve $\gamma(s) := (\vartheta(s), \varphi(s), t(s)) := (\vartheta_0 + s, \varphi_0, t_0 + \varkappa \cdot s)$ ist eine Parametrisierung des Längenkreises definiert durch die Bedingungen $\varphi = \varphi_0$, $\frac{dt}{d\vartheta} = \varkappa$. Sie erfüllt offensichtlich die Bewegungsgleichungen (0.15), was zeigt dass Längenkreise tatsächlich Geodäten sind.

Die Kurve $\gamma(s) := (\vartheta(s), \varphi(s), t(s)) := (\vartheta_0, \varphi_0 + s, t_0 + \varkappa \cdot s)$ ist eine Parametrisierung des Breitenkreises definiert durch die Bedingungen $\vartheta = \vartheta_0$, $\frac{dt}{d\varphi} = \varkappa$: const. Sie erfüllt offensichtlich im allgemeinen nur die 2. Gleichung aus (0.15), die erste genau dann wenn $\vartheta = \pi/2$ (der pathologische Fall $\vartheta \in \{0, \pi\}$ sei ausgenommen). Da $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \text{const}$, ist dies gleichbedeutend mit der Tatsache dass, der Äquator der einzige geodätische Breitenkreis ist.

Aufgabe 03

Führen die neuen Koordinaten r, ϑ, φ und $0 \leq \rho$ ein, definiert durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Rr \sin\vartheta \cos\varphi \\ Rr \sin\vartheta \sin\varphi \\ Rr \cos\vartheta \\ \sqrt{\rho^2 - R^2 r^2} \end{pmatrix} \tag{0.16}$$

Durch Einsetzen von

$$\begin{aligned} dx &= R \sin\vartheta \cos\varphi \; dr + Rr \cos\vartheta \cos\varphi \; d\vartheta - Rr \sin\vartheta \sin\varphi \; d\varphi \\ dy &= R \sin\vartheta \sin\varphi \; dr + Rr \cos\vartheta \sin\varphi \; d\vartheta + Rr \sin\vartheta \cos\varphi \; d\varphi \\ dz &= R \cos\vartheta \; dr - Rr \sin\vartheta \; d\vartheta \\ dw &= \frac{\rho \; d\rho - R^2 r \; dr}{\sqrt{\rho^2 - R^2 r^2}} \end{aligned}$$

in die Metrik

$$g = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 \tag{0.17}$$

ergibt sich die Darstellung

$$\begin{aligned} g &= \overbrace{R^2 \; dr^2 + R^2 r^2 \; d\vartheta^2 + R^2 r^2 \sin^2\vartheta \; d\varphi^2}^{dx^2+dy^2+dz^2} + \overbrace{\frac{1}{\rho^2 - R^2 r^2} \left[\rho^2 \; d\rho^2 + R^4 r^2 \; dr^2 - \rho r R^2 \left(d\rho \; dr + dr \; d\rho\right)\right]}^{dw^2} \\ &= \left[R^2 + \frac{R^4 r^2}{\rho^2 - R^2 r^2}\right] \; dr^2 + R^2 r^2 \; d\vartheta^2 + R^2 r^2 \sin^2\vartheta \; d\varphi^2 + \frac{1}{\rho^2 - R^2 r^2} \left[\rho^2 \; d\rho^2 - \rho r R^2 \left(d\rho \; dr + dr \; d\rho\right)\right] \end{aligned} \tag{0.18}$$

Die 3-Sphäre

$$B_R := \{ \underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{(Rr)^2} + w^2 = R^2 \} = \{\rho = R\}$$

ist eine Untermannigfaltigkeit im Raum auf der r, ϑ, φ Koordinaten bilden (mit $\rho = R : \text{const}$). Die 4er Metrik g induziert auf dieser daher die 3er Metrik (Pullback-Metrik)

$$\begin{aligned} g_s &:= \left[R^2 + \frac{R^4 r^2}{R^2 - R^2 r^2}\right] \; dr^2 + R^2 r^2 \; d\vartheta^2 + R^2 r^2 \sin^2\vartheta \; d\varphi^2 \\ &= R^2 \cdot \left[\frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 \; d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta \; d\varphi^2\right] \end{aligned} \tag{0.19}$$

was genau dem räumlichen Teil der Robertson-Walker Metrik (0.20) im Fall $\varepsilon = 1$ entspricht.

Aufgabe 04

(a) Die Christoffel-Symbole der Robertson-Walker Metrik

$$g = R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \varepsilon r^2} + r^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \; d\varphi^2\right)\right] - c^2 \; dt^2 \tag{0.20}$$

ergeben sich über die allgemeine Formel (0.5) gemäß

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{\varepsilon r}{1-\varepsilon r^2} \quad , \quad \Gamma^r_{rt} = \Gamma^r_{tr} = \frac{R'}{R} \quad , \quad \Gamma^r_{\vartheta\vartheta} = r(\varepsilon r^2 - 1) \quad , \quad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = r(\varepsilon r^2 - 1)\sin^2\vartheta$$

$$\Gamma^\vartheta_{r\vartheta} = \Gamma^\vartheta_{\vartheta r} = \frac{1}{r} \quad , \quad \Gamma^\vartheta_{\vartheta t} = \Gamma^\vartheta_{t\vartheta} = \frac{R'}{R} \quad , \quad \Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} = -\cos\vartheta\sin\vartheta$$

$$\Gamma^\varphi_{r\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{1}{r} \quad , \quad \Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi\vartheta} = \cot\vartheta \quad , \quad \Gamma^\varphi_{\varphi t} = \Gamma^\varphi_{t\varphi} = \frac{R'}{R}$$

$$\Gamma^t_{rr} = \frac{RR'}{c^2(1-\varepsilon r^2)} \quad , \quad \Gamma^t_{\vartheta\vartheta} = \frac{r^2}{c^2}RR' \quad , \quad \Gamma^t_{\varphi\varphi} = \frac{r^2}{c^2}RR'\sin^2\vartheta$$

O.b.d.A. sei die Weltlinie $\gamma = \gamma(s)$ der Galaxie parametrisiert bzgl. deren Eigenzeit s, sprich

$$-c^2 = g(\dot\gamma, \dot\gamma) = -c^2\dot t^2$$

bzw. $\dot t = 1$. Zu zeigen wäre: die Kurve $\gamma(s) = (r_0, \vartheta_0, \varphi_0, t_0 + s)$ (mit $r_0, \vartheta_0, \varphi_0, t_0$: const) erfüllt die Geodätengleichung. Tatsächlich:

$$\ddot r + \Gamma^r_{\mu\nu}\dot x^\mu \dot x^\nu = 0 + \underbrace{\Gamma^r_{tt}}_{0}\dot t\dot t = 0$$

$$\ddot\vartheta + \Gamma^\vartheta_{\mu\nu}\dot x^\mu \dot x^\nu = 0 + \underbrace{\Gamma^\vartheta_{tt}}_{0}\dot t\dot t = 0$$

$$\ddot\varphi + \Gamma^\varphi_{\mu\nu}\dot x^\mu \dot x^\nu = 0 + \underbrace{\Gamma^\varphi_{tt}}_{0}\dot t\dot t = 0$$

$$\ddot t + \Gamma^t_{\mu\nu}\dot x^\mu \dot x^\nu = 0 + \underbrace{\Gamma^t_{tt}}_{0}\dot t\dot t = 0$$

(b) Beginnend mit den allgemeinen Geodätengleichungen (0.7) erhält man unter den Bedingungen $\dot\vartheta = \dot\varphi = 0$ die vereinfachten Gleichungen:

$$0 = \ddot r + \Gamma^r_{\mu\nu}\dot x^\mu \dot x^\nu = \ddot r + \Gamma^r_{rr}\dot r^2 + 2\Gamma^r_{tr}\dot t\dot r + \Gamma^r_{tt}\dot t^2 = \ddot r + \frac{\varepsilon r\dot r^2}{1-\varepsilon r^2} + 2\frac{R'}{R}\dot t\dot r$$

$$0 = \ddot t + \Gamma^t_{\mu\nu}\dot x^\mu \dot x^\nu = \ddot t + \Gamma^t_{rr}\dot r^2 + 2\Gamma^t_{tr}\dot t\dot r + \Gamma^t_{tt}\dot t^2 = \ddot t + \frac{\dot r^2 RR'}{c^2(1-\varepsilon r^2)} \tag{0.21}$$

wobei die beiden Gleichungen für φ, ϑ automatisch erfüllt sind:

$$\ddot\vartheta + \Gamma^\vartheta_{\mu\nu}\dot x^\mu \dot x^\nu = \underbrace{\Gamma^\vartheta_{rr}}_{0}\dot r^2 + 2\underbrace{\Gamma^\vartheta_{tr}}_{0}\dot t\dot r + \underbrace{\Gamma^\vartheta_{tt}}_{0}\dot t^2 = 0$$

$$\ddot\varphi + \Gamma^\varphi_{\mu\nu}\dot x^\mu \dot x^\nu = \underbrace{\Gamma^\varphi_{rr}}_{0}\dot r^2 + 2\underbrace{\Gamma^\varphi_{tr}}_{0}\dot t\dot r + \underbrace{\Gamma^\varphi_{tt}}_{0}\dot t^2 = 0$$

Da man zeitartige Geodäten bzgl. der entsprechenden Eigenzeit s parametrisieren kann, kann man o.B.d.A. annehmen

$$-c^2 = g_{\mu\nu}\dot x^\mu \dot x^\nu = \frac{R^2\dot r^2}{1-\varepsilon r^2} - c^2\dot t^2 \quad . \tag{0.22}$$

Eingesetzt in die 2. DGL aus (0.21) ergibt

$$\ddot{t} = \frac{R'(t)}{R(t)} \cdot \left(1 - \dot{t}^2\right) = \frac{\dot{R}}{R\dot{t}} \cdot \left(1 - \dot{t}^2\right) \tag{0.23}$$

bzw.

$$\frac{d}{ds} \ln\left[\dot{t}^2 - 1\right] = \frac{2\dot{t} \cdot \ddot{t}}{\dot{t}^2 - 1} = -\frac{2\dot{R}}{R} = -2\frac{d}{ds} \ln R \tag{0.24}$$

und daher

$$\dot{t}^2 - 1 = \frac{E}{R^2(t)} \quad , \quad E : \text{const} \quad . \tag{0.25}$$

(c) Aufgrund der Isotropie des Raumes, kann für das Teilchen o.B.d.A. $\varphi = \vartheta = \text{const}$ angenommen werden. Das Teilchen bewegt sich also auf einer radialen Geodäte und erfüllt insbesondere (0.24). Betrachten nun seine radiale Geschwindigkeit $v := R\frac{d\chi}{dt}$ wobei

$$r =: \begin{cases} \sin\chi & : \varepsilon = 1 \\ \sinh\chi & : \varepsilon = -1 \\ \chi & : \varepsilon = 0 \end{cases} \tag{0.26}$$

Es lässt sich schreiben

$$v = R\frac{d\chi}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{R}{\sqrt{1-\varepsilon r^2}}\frac{dr}{dt} = \frac{R\dot{r}}{\sqrt{1-\varepsilon r^2}} \cdot \frac{1}{\dot{t}} \overset{(0.22)}{=} \frac{c}{\dot{t}}\sqrt{\dot{t}^2 - 1} \overset{(0.25)}{=} c\sqrt{\frac{E}{E + R^2}} \quad , \tag{0.27}$$

wobei die Anfangsbedingung $v(t_0) \overset{!}{=} v_0$ impliziert

$$E = \frac{R^2(t_0) \cdot v_0^2}{c^2 - v_0^2} \quad . \tag{0.28}$$

Aus (0.27) wird ersichtlich, dass im Falle eines unbegrenzt expandierenden Universums $v \overset{R(t)\to\infty}{\longrightarrow} 0$, das heißt das Teilchen kommt für $t \to \infty$ schließlich zur Ruhe. Aus (0.27) erhält man außerdem die DGL

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{c}{R}\sqrt{\frac{E}{E + R^2}} \tag{0.29}$$

bzw. die Grenzkoordinate

$$\chi_\infty = \int\limits_{t_0}^{\infty} \frac{c}{R(t)}\sqrt{\frac{E}{E + R^2(t)}}\, dt \quad . \tag{0.30}$$