

Einführung in die Kosmologie

FSU Jena - SS 2010

Klausur

20.07.2010, 12:30 - 14:30

Aufgabe 01 - Galaxienzählungen

In einem zweidimensionalen, kugelförmigen Modelluniversum mit dem Radius R haben Kreise um den Nordpol einen in der Kugelfläche gemessenen Radius D .

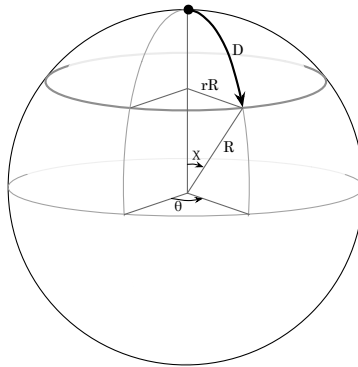


Abbildung 1: Zur Aufgabe 01

- (a) Zeigen Sie, dass der Umfang eines Kreises $U = 2\pi R \sin \frac{D}{R}$ beträgt.
- (b) In diesem zweidimensionalen Universum seien Galaxien mit der Anzahldichte n gleichmäßig verteilt. Zeigen Sie, dass die Gesamtzahl N der Galaxien innerhalb des Radius D durch

$$N = 2\pi n R^2 \left[1 - \cos \frac{D}{R} \right] \quad (1)$$

gegeben ist. Entwickeln Sie dieses Resultat für $D \ll R$ und gewinnen Sie so eine Entsprechung für den flachen Raum. Sehen Sie mehr oder weniger Galaxien innerhalb desselben Radius D je nachdem, ob das Universum kugelförmig oder flach ist?

Aufgabe 02 - Abschätzung der Hubble-Zahl

Das Alter des Milchstraßensystems kann durch den radioaktiven Zerfall von Uran abgeschätzt werden, welches in Supernovae produziert wird. Das Verhältnis der Anfangshäufigkeiten der Uran-Isotope U^{235} und U^{238} ist danach

$$\frac{U^{235}}{U^{238}} \Big|_{\text{initial}} \approx 1.65 \quad (2)$$

Die Zerfallsraten dieser Isotope sind

$$\lambda(U^{235}) = 0.97 \times 10^{-9} \text{ a}^{-1} \quad , \quad \lambda(U^{238}) = 0.15 \times 10^{-9} \text{ a}^{-1} \quad (3)$$

Das heutige Häufigkeitsverhältnis beträgt

$$\frac{U^{235}}{U^{238}} \Big|_{\text{final}} \approx 0.0072 \quad (4)$$

- (a) Schätzen Sie aus dem Zerfallsgesetz $U(t) = U(0) \cdot e^{-\lambda t}$ das Alter des Milchstraßensystems ab.
- (b) Nehmen Sie an, dass das Milchstraßensystem mindestens weitere 10^9 Jahre zu seiner Entstehung benötigte. Bestimmen Sie daraus eine Obergrenze für die Hubble-Zahl in einem Universum mit kritischer Dichte.

Aufgabe 03 - Ein mechanisches Analogon zur Friedman-Gleichung

Ein gerades Rohr, dessen einzige Funktion darin besteht, die Eindimensionalität der Bewegung zu garantieren, liege parallel zur x -Achse eines Koordinatensystems. Sein eines Ende falle mit dem Nullpunkt dieses Koordinatensystems zusammen. An diesem Ende befinde sich ein Massenpunkt P_1 mit der Masse M . Ein zweiter Massenpunkt P_2 mit der Masse m starte mit einer bestimmten Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ vom Punkt $x = 0$, wo sich P_1 befindet, und bewege sich dann unter dem Einfluss der Gravitationsanziehung von P_1 . Wenn der Massenpunkt P_2 bei $x = x_0$ die Geschwindigkeit v_0 hat, gibt es einen Punkt $x = x_1$, wo seine Geschwindigkeit $v = 0$ ist.

- (a) Zeigen Sie, dass der Energiesatz in der Form

$$\dot{x}^2 = 2GM \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x_1} \right] \quad (5)$$

geschrieben werden kann und beschreiben Sie die für verschiedene Werte von x_1 möglichen Bewegungstypen.

- (b) Bestimmen Sie x_1 als Funktion von x_0 und v_0 .

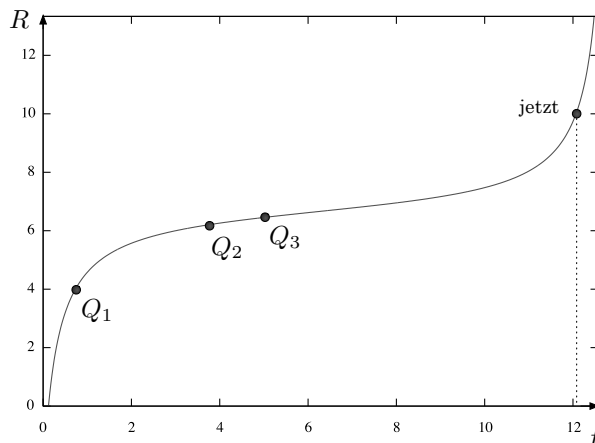
- (c) Vergleichen Sie mit der Friedman-Gleichung

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \mu - \frac{\varepsilon c^2}{R^2} \quad (6)$$

Zweiter Aufgabenkomplex - Fragen

Beantworten Sie stichpunktartig, in Formeln oder mit Skizzen die nachfolgend aufgeführten Fragen.

- (a) Beantworten Sie mit Hilfe der Abbildung folgende Fragen:



- Welches Vorzeichen hat der Verzögerungsparameter jetzt und welches für den Quasar Q_1 ?
 - Welche Rotverschiebung haben die Quasare Q_2 und Q_3 ?
 - Ist die Hubble-Zeit für den Zeitpunkt *jetzt* größer oder kleiner als das Weltalter?
- (b)
- Es wurden Quasare mit Rotverschiebungen $z = 4$ beobachtet. Wie groß war das Universum im Vergleich zu heute, als diese Quasare das heute empfangene Licht aussandten? Wie groß war die mittlere Dichte damals in Vergleich zu heute?

- In einem Einstein-de Sitter Kosmos ist die Rückblickzeit durch

$$\tau = \frac{2}{3H_o} \left[1 - \frac{1}{(1+z)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (7)$$

gegeben. Wie groß ist die Rückblickzeit für die Rotverschiebung $z = 4$, wenn die Hubble-Zeit 20 Milliarden Jahre beträgt? Wäre die Rückblickzeit für ein geschlossenes Universum größer oder kleiner als für das Einstein-de Sitter Modell?

- Schätzen Sie unter der Annahme, dass es keine Galaxien mit Rotverschiebungen größer als $z = 5$ gibt, mit Hilfe der Rückblickzeit in einem Einstein-de Sitter Kosmos ab, wann sich im Vergleich zur Wasserstoff-(Re)-Kombinationszeit Galaxien gebildet haben. Inwiefern erwächst aus dem Ergebnis ein Problem für Modelle der Galaxienentstehung?
- (c) Die mittlere Energiedichte μc^2 der Materie ist heute 2000 mal größer als die der Strahlung. Bei welcher Rotverschiebung hatten Materie und Strahlung die gleiche Energiedichte?