07.04.2010

Übungen zur Kontinuumsmechanik

Sommersemester 2010

Blatt 1

1.) **Vektoralgebra**

Zeigen Sie, dass für drei beliebige Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ gilt:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b},$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}),$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}).$$

Verwenden Sie dazu die Zerlegungen $\mathbf{a} = \sum_i a_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{b} = \sum_i b_i \mathbf{e}_i$, etc. nach drei paarweise orthogonalen Einheitsvektoren $\mathbf{e}_i$ mit $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ und $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \sum_k \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k$ mit dem Levi-Civita-Symbol $\epsilon_{ijk} = (i-j)(j-k)(k-i)/2$. Dabei ist: $i, j, k = 1, 2, 3$.

Offensichtlich ist der vollständig antisymmetrische Einheitstensor ϵ_{ijk} gegeben durch:
0, falls $i = j$ oder $j = k$ oder $i = k$ ist;
1, falls i, j, k eine gerade Permutation von 1,2,3 bilden;
-1, falls i, j, k eine ungerade Permutation von 1,2,3 bilden.

$\sum_i \epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$.
δ_{ij} ist das Kronecker-Symbol, d.h. der (symmetrische) Einheitstensor.

Weiterhin gilt:

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i a_i b_i$,

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \sum_i \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} a_j b_k \mathbf{e}_i$.

Zeigen Sie: $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$.

Abgabetermin: 14.04.10 in der Vorlesung