Kern- und Elementarteilchenphysik
FSU Jena - SS 2010
Übungsserie 09 - Lösungen

Stilianos Louca

9. August 2010

Aufgabe 24

Semiklassische Betrachtung

Der Zustand eines quantenmechanischen freien Teilchen ist charakterisiert durch seinen Impuls $\mathbf{p}$ und besitzt Impulszustandsdichte $dN/d\mathbf{p} = \text{const}$. Mit Hilfe der Energie-Impulsbeziehung $E = \sqrt{\mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4} - mc^2$ (E kinetische Energie) lässt sich daraus die Energiezustandsdichte

$$\frac{dN}{dE} = \frac{dp}{dE} \cdot \frac{dN}{dp} = \frac{dp}{dE} \cdot \underbrace{\int\limits_{S_2} d\Omega\ p^2 \underbrace{\frac{dN}{dp\ d\Omega}}_{\frac{dN}{d^3\mathbf{p}}}}_{\text{const}} \propto \left(E + mc^2\right) \cdot \sqrt{E} \cdot \sqrt{E + 2mc^2} \tag{0.1}$$

ableiten. Nach Fermis Goldene Regel erhält man für den β-Zerfall eine spektrale Übergangsrate von

$$\frac{d\lambda}{dE_e} \propto \frac{dN_e}{dE_e}\frac{dN_\nu}{dE_\nu} \overset{(0.1)}{\propto} \sqrt{E_eE_\nu} \cdot (E_e + m_ec^2)(E_\nu + m_\nu c^2)\sqrt{(E_e + 2m_ec^2)(E_\nu + 2m_\nu c^2)}$$

$$= \sqrt{E_e(E_{\text{kin}} - E_e)} \cdot (E_e + m_ec^2)(E_{\text{kin}} - E_e + m_\nu c^2)\sqrt{(E_e + 2m_ec^2)(E_{\text{kin}} - E_e + 2m_\nu c^2)} \tag{0.2}$$

Im Grenzfall $E_e \to 0$ verhält sich (0.2) wie

$$\frac{d\lambda}{dE_e} \sim \sqrt{2E_{\text{kin}}}\left(m_ec^2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot (E_{\text{kin}} + m_\nu c^2)\sqrt{E_{\text{kin}} + 2m_\nu c^2} \cdot \sqrt{E_e} \tag{0.3}$$

und im Grenzfall $E_e \to E_{\text{kin}}$ wie

$$\frac{d\lambda}{dE_e} \sim \sqrt{2E_{\text{kin}}}\left(m_\nu c^2\right)^{\frac{3}{2}} (E_{\text{kin}} + m_ec^2)\sqrt{E_{\text{kin}} + 2m_ec^2} \cdot \sqrt{E_{\text{kin}} - E_e}\ \ . \tag{0.4}$$

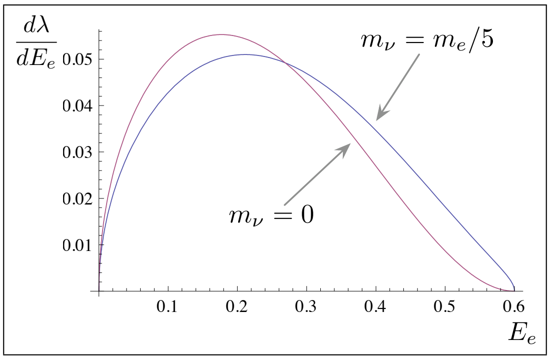

Abbildung 0.1: Zur Aufgabe 24: Verlauf der Zerfallswahrscheinlichkeitsdichte $\frac{d\lambda}{dE_e}$ (willkürliche Einheiten) für die Fälle $m_\nu = 0$ und $m_\nu = m_e/5$. In beiden Fällen wurde $E_{\text{kin}} = 1.2 \cdot m_e c^2$ angenommen. Beachte dass der zweite Graph in Wirklichkeit ($\beta^\pm$ Zerfall) etwas kürzer ist, da für $m_\nu \neq 0$ die verfügbare kinetische Energie E_{kin} geringer ist.

Nicht-relativistische Variante

Im nicht-relativistischen Grenzfall $E_{\text{kin}} \ll m_c^2, m_\nu c^2$ (eigentlich nicht realisierbar), kann alternativ die Schrödinger-Gleichung für ein Teilchen im Kastenpotential gelöst werden um direkt die Energieniveaus zu erhalten. Die Energieeigenzustände eines freien Teilchens der Masse m in einem kubischen Kasten der Kantenlänge a, sind unter periodischen Randbedingungen[1] charakterisiert durch die ganzzahligen Vektoren $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3$, mit Energien

$$E(\mathbf{k}) = \frac{h^2 \mathbf{k}^2}{8ma^2} \quad , \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3 \tag{0.5}$$

Die Zustandsdichte $dN/d\mathbf{k}$ im Raum $\mathbb{Z}^3$ beträgt gewissermaßen 1. In Kugelkoordinaten ausgedrückt lautet sie

$$\frac{dN}{dk\ d\varphi\ d\theta} = k^2 \sin\theta \cdot \frac{dN}{d\mathbf{k}} = k^2 \sin\theta \tag{0.6}$$

so dass die energiebezogene Zustandsdichte gegeben ist durch

$$\frac{dN}{dE} = \underbrace{\frac{dN}{dk}}_{4\pi k^2} \frac{dk}{dE} \overset{(0.5)}{=} \frac{a^3}{h^3} \pi m^{\frac{3}{2}} 2^{\frac{11}{2}} \sqrt{E} \tag{0.7}$$

Ist man nur an der Proportionalität $\frac{dN}{dE} \propto m^{\frac{3}{2}} \sqrt{E}$ interessiert, so kann man formal V beliebig groß wählen bzw. gegen ∞ gehen lassen. Man erhält daher nach Fermis Goldene Regel eine Übergangsrate pro Energie

$$\frac{d\lambda}{dE_e} \propto \frac{dN_e}{dE_e} \frac{dN_\nu}{dE_\nu} \propto (m_e m_\nu)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E_e E_\nu} = (m_e m_\nu)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{E_e (E_{\text{kin}} - E_e)} \quad . \tag{0.8}$$

Im Grenzfall $E_e \to 0$ verhält sich (0.8) bis auf Vorfaktoren wie

$$\frac{d\lambda}{dE_e} \sim \sqrt{E_e} \tag{0.9}$$

und im Grenzfall $E_e \to E_{\text{kin}}$ wie

$$\frac{d\lambda}{dE_e} \sim \sqrt{E_{\text{kin}} - E_e} \quad . \tag{0.10}$$

Aufgabe 25

(a) Die frei gesetzte Energie

$$E_{\text{kin}} = [m_{\text{At}}(N,Z) - Z \cdot m_e]\, c^2 - [m_{\text{At}}(N+1, Z-1) - (Z-1)\cdot m_e]\, c^2 - m_e c^2 - m_\nu c^2$$

$$= \Delta m_{\text{At}} c^2 - 2 m_e c^2 - m_\nu c^2 \tag{0.11}$$

findet sich als kinetische Energie des emittierten Positrons, Neutrinos und rückgestoßenen Kerns wieder. Unter Annahme einer verschwindenden Neutrinomasse $m_\nu = 0$ und kinetischer Energie des Positrons, nimmt (0.11) die Form

$$p_\nu c + E_R = \Delta m_{\text{At}} c^2 - 2 m_e c^2 = E_{\text{kin}} \tag{0.12}$$

an, wobei p_ν der Impuls des neutrinos und E_R die Rückstoßenergie des Kerns sei. Unter Beachtung der Impulserhaltung $\mathbf{p}_\nu + \mathbf{p}_{\text{kern}} = 0$ erhält man aus (0.12):

$$p_{\text{kern}} c + E_R = E_{\text{kin}} \tag{0.13}$$

bzw.

$$\sqrt{m_{\text{kern}}^2 c^4 + p_{\text{kern}}^2 c^2} = (E_{\text{kin}} + m_{\text{kern}} c^2) - p_{\text{kern}} c \tag{0.14}$$

Durch Quadrieren von (0.14) und Auflösung nach p_{kern} erhält man

$$p_{\text{kern}} = \frac{E_{\text{kin}}^2 + 2 m_{\text{kern}} c^2 E_{\text{kin}}}{2c\,(E_{\text{kin}} + m_{\text{kern}} c^2)} \tag{0.15}$$

und durch Einsetzen in (0.13)

$$\boxed{E_R = \frac{E_{\text{kin}}^2}{2(E_{\text{kin}} + m_{\text{kern}} c^2)}} \tag{0.16}$$

Im Falle $Z = 22, N = 23$ ist $\Delta m_{\text{At}} = 2.06\ \text{MeV} \cdot \text{c}^{-2}$ bzw. $E_{\text{kin}} \approx 1.04$ MeV. Mit $m_{\text{kern}} c^2 \approx 42.2$ GeV ergibt sich aus (0.16) schließlich die Rückstoßenergie

$$\boxed{E_R \approx 12.8\ \text{eV}} \tag{0.17}$$

Beachte dass das angesichts der Tatsache dass $E_{\text{kin}} \ll m_{\text{kern}} c^2$, das ganze auch nicht-relativistisch gerechnet werden könnte.

(b) Ähnlich zum β^+ - Zerfall, ist die freigesetzte Energie beim K-Einfang gegeben durch

$$E_{\text{kin}} = [m_{\text{At}}(N,Z) - Z m_e]\, c^2 + m_e c^2 - [m_{\text{At}}(N+1, Z-1) - (Z-1) m_e]\, c^2 - m_\nu c^2$$

$$= \Delta m_{\text{At}} c^2 - m_\nu c^2 \tag{0.18}$$

und ist diesmal als kinetische Energie des Neutrinos und Rückstoßenergie des Kerns zu finden (vgl. (0.13)). Auch hier gilt Impulserhaltung $\mathbf{p}_\nu + \mathbf{p}_{\text{kern}} = 0$ und man erhält in voller Analogie zu vorhin

$$E_R = \frac{E_{\text{kin}}^2}{2(E_{\text{kin}} + m_{\text{kern}} c^2)} \approx \frac{E_{\text{kin}}^2}{2 m_{\text{kern}} c^2} \tag{0.19}$$

wobei diesmal $E_{\text{kin}} \approx \Delta m_{\text{At}} c^2 = 2.06$ MeV. Dementsprechend erhält man die Rückstoßenergie

$$\boxed{E_R \approx 50.3\ \text{eV}} \tag{0.20}$$

Literatur

[1] *Nuclear Physics - Principles and Applications*, J. Lilley
Wiley, 2001