Kern- und Elementarteilchenphysik
FSU Jena - SS 2010
Übungsserie 08 - Lösungen

Stilianos Louca

16. Juni 2010

Aufgabe 22

(a) Nimmt man α-Teilchen und Kern als starre Kugeln an, so beträgt deren Zentralabstand r_0 zum Austrittzeitpunkt gerade die Summe deren Radien, sprich

$$r_0 = 1.3\left[(A-4)^{\frac{1}{3}} + 4^{\frac{1}{3}}\right] \text{ fm} \tag{0.1}$$

Nimmt man ein Coulombsches Zentralpotential von Typ

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2(Z-2)e^2}{r} \tag{0.2}$$

an, so ergibt sich

$$V(r_c) \stackrel{!}{=} E_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad r_c = \frac{(Z-2)}{2\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{E_\alpha} \quad . \tag{0.3}$$

Definieren

$$V_{CB} := V(r_0) \quad , \quad C := \frac{E_\alpha}{V_{CB}} = \frac{r_0}{r_c} \quad , \quad u := \frac{r_0}{Cr} \tag{0.4}$$

und erhalten den Gamow-Faktor

$$G = 2\int_{r_0}^{r_c} dr\,\sqrt{\frac{2m_\alpha}{\hbar^2}\left[V(r)-E_\alpha\right]} = \frac{r_0}{C\hbar}\sqrt{8m_\alpha E_\alpha}\cdot\int_1^{1/C}\sqrt{u-1}\,\frac{du}{u^2}$$

$$= \frac{r_0}{C\hbar}\sqrt{8m_\alpha E_\alpha}\cdot\left[-\frac{1}{u}\sqrt{u-1} + \arctan\sqrt{u-1}\right]_1^{1/C}$$

$$= \frac{r_0}{C\hbar}\sqrt{8m_\alpha E_\alpha}\cdot\left[\underbrace{\arctan\sqrt{\tfrac{1}{C}-1}}_{\arccos\sqrt{C}} - \sqrt{C(1-C)}\right]$$

$$= V_{CB}\frac{r_0}{\hbar}\sqrt{\frac{8m_\alpha}{E_\alpha}}\cdot\left[\arccos\sqrt{C} - \sqrt{C(1-C)}\right] \tag{0.5}$$

bzw.

$$\boxed{G = V(r_0)\frac{r_0}{\hbar}\sqrt{\frac{8m_\alpha}{E_\alpha}}\cdot\left[\arccos\sqrt{\frac{E_\alpha}{V(r_0)}} - \sqrt{\frac{E_\alpha}{V(r_0)} - \left[\frac{E_\alpha}{V(r_0)}\right]^2}\right]} \tag{0.6}$$

mit r_0 gegeben durch (0.1).

(b) Für $A = 224, Z = 88, E_\alpha = 5.7$ MeV erhält man $r_0 \approx 9.911$ fm, $r_c \approx 43.452$ fm, $V(r_0) \approx 2.499 \times 10^7$ eV und $C \approx 0.2281$. Mit $m_\alpha \approx 6.644 \times 10^{-27}$ kg ergibt sich nach obigen Überlegungen der Gamow-Faktor $G \approx 59.3049$. Durch die Geschwindigkeit $\mathrm{v}_\alpha = \sqrt{2E_\alpha/m_\alpha} \approx 0.0553$ c erhält man schließlich die Zerfallswahrscheinlichkeit pro Zeit

$$\boxed{\lambda = \frac{\mathrm{v}_\alpha}{2r_c} e^{-G} \approx 3.35 \times 10^{-6}\ \mathrm{Hz}} \tag{0.7}$$

was einer Halbwertszeit von etwa 3.45 Tagen entspricht.

Aufgabe 23

(a) Über die Unschärferelation $\Delta E \cdot \Delta t \gtrsim \frac{\hbar}{2}$ erhält man für eine mittlere Lebensdauer von $\Delta t = 1.41 \times 10^{-7}$ s eine natürliche Linienbreite von

$$\boxed{\Delta E \approx 2.3 \times 10^{-9}\ \mathrm{eV}} \tag{0.8}$$

(b) Die Rückstoßbedingte Verschiebung E_R der γ Strahlung, ist gegeben durch $E_R = E_\gamma^2/(2mc^2)$, wobei m die Kernmasse und E_γ die Strahlungsenergie ist. Für $(E^* - E_0) \ll mc^2$ ist $E_R \approx (E^* - E_0)^2/(2mc^2)$. Speziell erhält man für $(E^* - E_0) = 14.4$ keV, $m \approx 9.27 \times 10^{-26}$ kg eine Rückstoßverschiebung von etwa

$$\boxed{E_R \approx 1.99 \times 10^{-3}\ \mathrm{eV} \quad .} \tag{0.9}$$

Bei einer mittleren thermischen Geschwindigkeit $\mathrm{v_{th}}$ der Kerne sind Dopplerverschiebungen im Bereich von

$$E_D \approx \pm \frac{\mathrm{v_{th}}}{c} E_\gamma \approx \pm \frac{\mathrm{v_{th}}}{c} (E^* - E_0) \tag{0.10}$$

zu erwarten. Bei einer Temperatur T beträgt die mittlere Kerngeschwindigkeit ca.

$$\mathrm{v_{th}} \approx \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad . \tag{0.11}$$

Für $T = 293$ K erhält man somit eine thermische Linienverbreiterung von

$$\boxed{\Delta E_D \approx \frac{2}{c} \sqrt{\frac{3kT}{m}} \cdot (E^* - E_0) \approx 3.5 \times 10^{-2}\ \mathrm{eV} \quad .} \tag{0.12}$$