Kern- und Elementarteilchenphysik
FSU Jena - SS 2010
Übungsserie 07 - Lösungen

Stilianos Louca

9. Juni 2010

Aufgabe 20

(a) Da alle äußeren Elektronen aufgrund der Kugelsymmetrie keinen Einfluss auf das betrachtete Elektron haben, spürt dieses die potentielle Energie

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{(Z - n_s)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} \tag{0.1}$$

Da es sich mit Sicherheit auf der $r = r_0$ Schale aufhält, kann man sofort schreiben

$$V_{\text{ls}} = \frac{\hbar^2}{2m_e^2c^2} \cdot \frac{1}{r_0}\frac{dV}{dr}\bigg|_{r_0} = \frac{\hbar^2(Z - n_s)}{8\pi\varepsilon_0 m_e^2c^2} \cdot \frac{e^2}{r_0^3} \tag{0.2}$$

Für den Fall $Z = 50,\ n_s = 20,\ r_0 = 1 \times 10^{-10}$ m ergibt sich

$$\boxed{V_{\text{ls}} \approx 5.16 \times 10^{-22}\ \text{J} \approx 0.0032\ \text{eV}} \tag{0.3}$$

(b) Aus der integralen Maxwell Gleichung

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{E}\ d\mathbf{A} = \int_{\Omega} \frac{\rho}{\varepsilon_0}\ dV \tag{0.4}$$

für geschlossene Gebiete Ω, lässt sich ablesen, dass im Falle einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$, im Abstand r vom Ursprung die Feldstärke

$$\mathbf{E} = \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{0.5}$$

herrscht, mit $Q(r)$ als Gesamtladung innerhalb der r-Kugel. Im Falle einer homogen geladenen Kugel vom Radius R und Gesamtladung Q, entspricht dies im inneren der Kugel

$$\mathbf{E} = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{0.6}$$

Das Potential ergibt sich durch einfache Integration bzgl. r, wird jedoch nicht benötigt. Unter Annahme einer Gleichverteilung des betrachteten Protons im Kern (Radius $R = R_0 A^{\frac{1}{3}}$, Ladung $Q = (Z-1)e$) erhält man

$$V_{\text{ls}} = \int d^3\mathbf{r}\ \frac{w(r)\hbar^2}{2m_p^2c^2}\frac{e}{r}\underbrace{\frac{dU}{dr}}_{-E} = -\frac{3eQ\hbar^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3 m_p^2c^2} = -\frac{e^2\hbar^2}{8\pi\varepsilon_0 R_0^3 m_p^2 c^2}\frac{(Z-1)}{A} \tag{0.7}$$

Im Fall $Z = 50,\ A = 119,\ R_0 = 1.3$ fm erhält man

$$\boxed{V_{\text{ls}} \approx -5.97\ \text{keV}} \tag{0.8}$$

Aufgabe 21

a) Die die Umwandlungsprozesse beschreibenden Differentialgleichungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\dot{N}_1 &= -\lambda_1 N_1 \\ \dot{N}_2 &= -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1 \\ \dot{N}_3 &= \lambda_2 N_2\end{aligned} \tag{0.9}$$

mit den Anfangswerten

$$N_1(0) = N_{1,0},\ \ N_2(0) = 0 = N_3(0) \quad . \tag{0.10}$$

Die Lösung für N_1 erhält man sofort gemäß

$$\boxed{N_1(t) = N_{1,0} e^{-\lambda_1 t}} \tag{0.11}$$

so dass sich für N_2 die DGL

$$\dot{N}_2 = -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_{1,0} e^{-\lambda_1 t} \tag{0.12}$$

ergibt. Macht man den naheliegenden Ansatz

$$N_2(t) = \alpha e^{-\lambda_2 t} + \beta e^{-\lambda_1 t} \tag{0.13}$$

so ergibt die DGL (0.12) die Bedingung $\beta = \frac{\lambda_1 N_{1,0}}{\lambda_2 - \lambda_1}$ und die (0.10) die Bedingung $\alpha = -\beta$, das heißt

$$\boxed{N_2(t) = \frac{\lambda_1 N_{1,0}}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t} \right]} \tag{0.14}$$

Eine anschließende Probe zeigt dass (0.14) tatsächlich Lösung des Anfangswertproblems (AWP) für N_2 ist. Letztlich ergibt sich für N_3 das AWP

$$\dot{N}_3 = N_{1,0} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t} \right] \quad , \quad N_3(0) = 0 \tag{0.15}$$

dessen Lösung man durch direkte Integration erhält:

$$\boxed{N_3(t) = \frac{N_{1,0}}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\lambda_2 \left(e^{-\lambda_1 t} - 1 \right) + \lambda_1 \left(1 - e^{-\lambda_2 t} \right) \right] \quad .} \tag{0.16}$$

b) Durch Nullstellensuche der Ableitung von (0.14) erhält man für N_2 den Zeitpunkt maximaler Aktivität

$$\boxed{t_{2,\max} = \frac{\ln\left[\lambda_1 / \lambda_2\right]}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad .} \tag{0.17}$$

Zeitgleich besitzen die Kernarten N_1 und N_2 jeweils die Aktivitäten

$$\begin{aligned}\lambda_1 N_1(t_{2,\max}) &= \lambda_1 N_{1,0} \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right]^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}} \\ \lambda_2 N_2(t_{2,\max}) &= \frac{\lambda_1 \lambda_2 N_{1,0}}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}} - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}} \right] = \lambda_1 N_{1,0} \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right]^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}} \quad .\end{aligned} \tag{0.18}$$