Kern- und Elementarteilchenphysik
FSU Jena - SS 2010
Übungsserie 06 - Lösungen

Stilianos Louca

2. Juni 2010

Aufgabe 17

Führen die elliptischen Koordinaten φ, θ, ρ gemäß

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\rho \sin\theta \cos\varphi \\ b\rho \sin\theta \sin\varphi \\ a\rho \cos\theta \end{pmatrix} \quad , \quad \rho \geq 0,\ \varphi \in [0, 2\pi],\ \theta \in [0, \pi] \tag{0.1}$$

ein. Der Jacobian besitzt Determinante

$$\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = ab^2\rho^2 \sin\theta \tag{0.2}$$

Damit lässt sich nun schreiben

$$Q_{zz} = \int d^3\mathbf{r}\ \rho_0 \left(3z^2 - r^2\right) = \rho_0 ab^2 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{1} \rho^4 \sin\theta \left[2a^2\cos^2\theta - b^2\sin^2\theta\right]\ d\rho\ d\theta\ d\varphi$$

$$= \frac{2\pi}{5}\rho_0 ab^2 \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \left[2a^2\cos^2\theta - b^2\sin^2\theta\right]\ \theta = \frac{8\pi}{15}\rho_0 ab^2 \left(a^2 - b^2\right) = \frac{2Z}{5} \cdot \left(a^2 - b^2\right)$$

wobei verwendet wurde dass $Z = \rho_0 \cdot \frac{4\pi}{3} ab^2$.

Aufgabe 18

Aus Aufgabe (17) ist bekannt dass

$$Q_{zz} = \frac{2Z}{5}(a-b)(a+b) = \frac{4Z}{5} \cdot \Delta R \cdot R \tag{0.3}$$

Umgeschrieben also

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{5Q_{zz}}{4ZR^2} \quad . \tag{0.4}$$

Für den Deuteronkern ($Z = 1, R = 3.5$ fm$, Q_{zz} = 0.286$ fm^2) erhält man somit

$$\left.\frac{\Delta R}{R}\right|_{\text{Deut}} \approx 0.029 \quad . \tag{0.5}$$

Für den ^{181}Ta Kern ($Z = 73, R \approx 7.35$ fm$, Q_{zz} = 600$ fm^2) entsprechend

$$\left.\frac{\Delta R}{R}\right|_{\text{Ta}} \approx 0.19 \quad . \tag{0.6}$$

Aufgabe 19

Beginnend mit der Darstellung

$$\varphi_{j,m_j}\big|_{j=l+1/2} = aY_{l,m_j-1/2}\chi_{1/2} + bY_{l,m_j+1/2}\chi_{-1/2} \tag{0.7}$$

schreiben wir

$$\begin{aligned}
\left\langle\varphi_{j,m_j}\right|\hat{\mu}_z\left|\varphi_{j,m_j}\right\rangle\big|_{j=l+1/2} =& g_l\frac{\mu_k}{\hbar}\left\langle\varphi_{j,m_j}\right|\hat{l}_z\left|\varphi_{j,m_j}\right\rangle + g_s\frac{\mu_k}{\hbar}\left\langle\varphi_{j,m_j}\right|\hat{s}_z\left|\varphi_{j,m_j}\right\rangle \\
=& g_l\frac{\mu_k}{\hbar}\Big[|a|^2\left\langle Y_{l,m_j-1/2}\chi_{1/2}\right|\hat{l}_z\left|Y_{l,m_j-1/2}\chi_{1/2}\right\rangle \\
&+ |b|^2\left\langle Y_{l,m_j+1/2}\chi_{-1/2}\right|\hat{l}_z\left|Y_{l,m_j+1/2}\chi_{-1/2}\right\rangle \\
&+ \left(a^*b\left\langle Y_{l,m_j-1/2}\chi_{1/2}\right|\hat{l}_z\left|Y_{l,m_j+1/2}\chi_{-1/2}\right\rangle + \text{c.c.}\right)\Big] \\
&+ g_s\frac{\mu_k}{\hbar}\Big[|a|^2\left\langle Y_{l,m_j-1/2}\chi_{1/2}\right|\hat{s}_z\left|Y_{l,m_j-1/2}\chi_{1/2}\right\rangle \\
&+ |b|^2\left\langle Y_{l,m_j+1/2}\chi_{-1/2}\right|\hat{s}_z\left|Y_{l,m_j+1/2}\chi_{-1/2}\right\rangle \\
&+ \left(a^*b\left\langle Y_{l,m_j-1/2}\chi_{1/2}\right|\hat{s}_z\left|Y_{l,m_j+1/2}\chi_{-1/2}\right\rangle + \text{c.c.}\right)\Big] \\
=& g_l\mu_k\left[|a|^2\left(m_j-\tfrac{1}{2}\right) + |b|^2\left(m_j+\tfrac{1}{2}\right)\right] + g_s\frac{\mu_k}{2}\left(|a|^2-|b|^2\right) \\
=& g_l\mu_k\left[m_j\left(|a|^2+|b|^2\right) - \tfrac{1}{2}\left(|a|^2-|b|^2\right)\right] + g_s\frac{\mu_k}{2}\left(|a|^2-|b|^2\right) \\
=& g_l\mu_k\frac{2lm_j}{2l+1} + g_s\mu_k\frac{m_j}{2l+1}
\end{aligned}$$

Insbesondere

$$\max_{m_j}\left\langle\varphi_{j,m_j}\right|\hat{\mu}_z\left|\varphi_{j,m_j}\right\rangle\big|_{j=l+1/2} = \left\langle\varphi_{j,m_j}\right|\hat{\mu}_z\left|\varphi_{j,m_j}\right\rangle\big|_{\substack{j=l+1/2\\ m_j=j}} = g_l\mu_k\frac{2lj}{2l+1} + g_s\mu_k\frac{j}{2l+1} \tag{0.8}$$

was einem gyromagnetischen Faktor von

$$\boxed{g\big|_{j=l+1/2} = \frac{1}{\mu_k j}\cdot\max_{m_j}\left\langle\varphi_{j,m_j}\right|\hat{\mu}_z\left|\varphi_{j,m_j}\right\rangle\big|_{j=l+1/2} = g_l + \frac{(g_s-g_l)}{2l+1}} \tag{0.9}$$

entspricht. Ähnlich erhält man mit

$$\varphi_{j,m_j}\big|_{j=l-1/2} = aY_{l,m_j+1/2}\chi_{-1/2} - bY_{l,m_j-1/2}\chi_{1/2} \tag{0.10}$$

für den Fall $j = l - 1/2$:

$$\begin{aligned}
\left\langle\varphi_{j,m_j}\right|\hat{\mu}_z\left|\varphi_{j,m_j}\right\rangle\big|_{j=l-1/2} &= g_l\mu_k\left[m_j\left(|a|^2+|b|^2\right) + \tfrac{1}{2}\left(|a|^2-|b|^2\right)\right] - \frac{g_s\mu_k}{2}\left(|a|^2-|b|^2\right) \\
&= g_l\mu_k m_j\frac{2(l+1)}{2l+1} - g_s\mu_k\frac{m_j}{2l+1}
\end{aligned}$$

Insbesondere

$$\max_{m_j} \left\langle \varphi_{j,m_j} \right| \hat{\mu}_z \left| \varphi_{j,m_j} \right\rangle \Big|_{j=l-1/2} = \left\langle \varphi_{j,m_j} \right| \hat{\mu}_z \left| \varphi_{j,m_j} \right\rangle \Big|_{\substack{j=l-1/2 \\ m_j=j}} = g_l \mu_k j \frac{2(l+1)}{2l+1} - g_s \mu_k \frac{j}{2l+1} \tag{0.11}$$

was einem gyromagnetischen Faktor von

$$\boxed{g\Big|_{j=l-1/2} = \frac{1}{\mu_k j} \cdot \max_{m_j} \left\langle \varphi_{j,m_j} \right| \hat{\mu}_z \left| \varphi_{j,m_j} \right\rangle \Big|_{j=l-1/2} = g_l - \frac{(g_s - g_l)}{2l+1}} \tag{0.12}$$

entspricht.