Kern- und Elementarteilchenphysik
FSU Jena - SS 2010
Übungsserie 05 - Lösungen

Stilianos Louca

26. Mai 2010

Aufgabe 14

Beginnend mit dem Ausdruck

$$\Delta E_B = -\frac{3}{5}E_{f0}\left(Z^{\frac{5}{3}} + N^{\frac{5}{3}}\right)\cdot A^{-\frac{2}{3}} \tag{0.1}$$

und der Substitution $Z = A/2 - \Delta Z$ bzw. $N = A/2 + \Delta Z$ schreiben wir[1]

$$\begin{aligned}
\Delta E_B &= -\frac{3}{5}E_{f0}\left[(A/2-\Delta Z)^{\frac{5}{3}} + (A/2+\Delta Z)^{\frac{5}{3}}\right]\cdot A^{-\frac{2}{3}} \\
&= -\frac{3AE_{f0}}{5\cdot 2^{\frac{5}{3}}}\left[(1-2\Delta Z/A)^{\frac{5}{3}} + (1+2\Delta Z/A)^{\frac{5}{3}}\right] \\
&= -\frac{3AE_{f0}}{5\cdot 2^{\frac{5}{3}}}\left[2 - \frac{5}{3}\left[\frac{2\Delta Z}{A} - \frac{2\Delta Z}{A}\right] + \frac{5}{9}\left[\left(\frac{2\Delta Z}{A}\right)^2 + \left(-\frac{2\Delta Z}{A}\right)^2\right] + \mathcal{O}(\Delta Z^3)\right] \\
&= -\frac{3AE_{f0}}{5\cdot 2^{\frac{5}{3}}}\left[2 + \frac{40}{9}\frac{\Delta Z^2}{A^2}\right] + \mathcal{O}(\Delta Z^3)
\end{aligned} \tag{0.2}$$

und erhalten die Bindungsenergie

$$E_B = V_0 A - E_{C0}\frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + \Delta E_B \overset{(0.2)}{=} A\cdot\underbrace{\left[V_0 - \frac{3E_{f0}}{5\cdot 2^{\frac{2}{3}}}\right]}_{a_V} - \underbrace{E_{C0}}_{a_C}\frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - \underbrace{\frac{2^{\frac{4}{3}}E_{f0}}{3}}_{a_A}\frac{\Delta Z^2}{A} + \mathcal{O}(\Delta Z^3) \tag{0.3}$$

was teilweise der Bethe-Weizsäcker-Formel entspricht!

Aufgabe 15

Die Reaktion

$${}^A_Z X \longrightarrow {}^A_{Z+1}X + e + \overline{\nu}_e \tag{0.4}$$

ist prinzipiell nur dann möglich, wenn die Gesamtenergie der Ausgangsstoffe die der Endstoffe übertrifft, das heißt[2]

$$Zm_pc^2 + (A-Z)m_nc^2 - E_B(A,Z) \geq (Z+1)m_pc^2 + (A-Z-1)m_nc^2 + m_ec^2 - E_B(A,Z+1) \tag{0.5}$$

---

[1] Beachte den Taylorschen Satz

$$(1-x)^{\frac{5}{3}} = 1 - \frac{5}{3}x + \frac{10}{9}\frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^3) \quad .$$

[2] Unter Vernachlässigung der Antineutrino-Energie.

bzw.

$$E_B(A,Z) \leq E_B(A,Z+1) + \underbrace{m_n c^2 - m_p c^2 - m_e c^2}_{=:E_0} \tag{0.6}$$

Mit Hilfe der Bethe-Weizsäcker-Formel

$$E_B(A,Z) = a_V A - a_S A^{\frac{2}{3}} - a_C Z^2 A^{-\frac{1}{3}} - a_A (Z - A/2)^2 \cdot A^{-1} + a_P \delta \cdot A^{-\frac{1}{2}} \tag{0.7}$$

erhält man für ug- bzw. gu- Kerne ${}^A_Z X$ die Bedingung

$$-a_C Z^2 A^{-\frac{1}{3}} - a_A \left(Z - \tfrac{A}{2}\right)^2 A^{-1} \leq -a_C (Z+1)^2 A^{-\frac{1}{3}} - a_A \left(Z - \tfrac{A}{2} + 1\right)^2 A^{-1} + E_0 \tag{0.8}$$

bzw.

$$\boxed{Z \leq \frac{a_A + E_0}{2\left[a_C A^{-\frac{1}{3}} + a_A A^{-1}\right]} - \frac{1}{2}} \tag{0.9}$$

Aufgabe 16

Aus (0.9) erhält man für $A = 101$ die maximale Atomzahl

$$Z_{\max} \approx \lfloor 43.18 \rfloor = 43 \tag{0.10}$$

für die ein β^- Zerfall energetisch betrachtet noch möglich ist[3].

[3]Vorbei verwendet wurde: $a_A = 92.86$ MeV, $a_C = 0.71$ MeV und $E_0 = 0.7828$ MeV.