Kern- und Elementarteilchenphysik
FSU Jena - SS 2010
Übungsserie 04 - Lösungen

Stilianos Louca

19. Mai 2010

Aufgabe 10

Das Integral

$$F(\mathbf{q}) := \int d^3\mathbf{r}\ w(\mathbf{r}) \exp\left[i\mathbf{qr}\right] \tag{0.1}$$

hängt aufgrund der Kugelsymmetrie von w, nur von der Länge q von $\mathbf{q}$ ab. Wählen also o.B.d.A. $\mathbf{q} \parallel \mathbf{e}_z$ und gehen über in Kugelkoordinaten, so dass wir schreiben können

$$F(q) = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} w(r) \exp\left[iqr\cos\theta\right]\ r^2 \sin\theta\ d\varphi\ d\theta\ dr = 2\pi \int_0^\infty dr\ r^2 w(r) \int_0^\pi d\theta\ \exp\left[iqr\cos\theta\right] \sin\theta$$

$$= -\frac{2\pi}{iq} \int_0^\infty dr\ rw(r)\ \exp\left[iqr\cos\theta\right]\Big|_{\theta=0}^{\pi} = \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty dr\ rw(r) \sin(qr) \tag{0.2}$$

Im Falle $w(r) = \rho_0 \Theta(1 - r/R)$, nimmt (0.2) die Form

$$F(q) = \frac{4\pi\rho_0}{q} \int_0^R r\sin(qr)\ dr = \frac{4\pi\rho_0}{q} \left[-\frac{r}{q}\cos(qr) + \frac{1}{q^2}\sin(qr)\right]\Bigg|_{r=0}^{R} = \frac{4\pi\rho_0}{q^3}\left[\sin(qR) - qR\cos(qR)\right] \tag{0.3}$$

an. Der Wert $q_1 := (2p_r/\hbar)\sin(\vartheta_1/2)$ ist Nullstelle von F, genau dann wenn

$$\tan(q_1 R) = q_1 R \tag{0.4}$$

Numerisch lässt sich der kleinste Fixpunkt $0 \leq x_1$ von $\tan(\cdot)$ bestimmen als $x_1 \approx 4.49341$, was einer kleinsten, positiven Nullstelle von

$$\vartheta_1 = 2\arcsin\left[\frac{x_1\hbar}{2p_r R}\right] \approx 2\arcsin\left[\frac{4.49 \cdot \hbar}{2p_r R}\right] \tag{0.5}$$

entspricht.

Aufgabe 11

Unter der Annahme einer Ladungsverteilung $w(r) = \rho_0\Theta(1 - r/R)$ im ^{16}O Kern, folgt aus (0.5) der Radius

$$R = \frac{x_1\hbar}{2p_r} \cdot \frac{1}{\sin(\vartheta_1/2)} \quad , \quad x_1 \approx 4.49341 \tag{0.6}$$

Für eine Elektronenenergie von 750 MeV ($\rightarrow p_r \approx 4.0 \times 10^{-19}$ m $\cdot$ Kg $\cdot$ s^{-1}) und kleinste Formfaktor-Nullstelle $\vartheta_1 = 24\ ^\circ$ ergibt sich der Radius

$$R \approx 2.84 \times 10^{-15}\ \text{m} \tag{0.7}$$

Aufgabe 12

(a) Aus der Bethe-Weizsäcker-Formel erhält man unter der Näherung $Z = A/2$ und $a_p = 0$ die Bindungsenergie pro Nukleon

$$e_b(A) := E_B(A,Z)/A = a_V - a_S A^{-\frac{1}{3}} - \frac{a_C}{4} A^{\frac{2}{3}} \tag{0.8}$$

Das Auffinden des Maximums reduziert sich auf die Bestimmung der Nullstelle der Ableitung $\partial_A e_b(A)$:

$$\frac{de_b(A)}{dA} = \frac{a_S}{3} A^{-\frac{4}{3}} - \frac{a_C}{6} A^{-\frac{1}{3}} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{2a_S}{a_C} \approx 51.7 \approx 52 \tag{0.9}$$

was mit $Z = A/2 = 26$ genau Eisen $_{26}\mathrm{Fe}$ entspricht.

(b) Energetisch betrachtet, ist eine Spaltung in zwei gleich große Tochterkerne genau dann möglich, wenn die Summe der Bindungsenergien letzterer diese des Ausgangskerns übertrifft. Nach Bethe-Weizsäcker entspricht dies unter der Näherung $Z = A/2$ und $a_p = 0$ der Bedingung

$$E_B(A, Z = A/2) \stackrel{!}{\leq} 2E_B(A/2, Z = A/4)$$

$$\Leftrightarrow a_V A - a_S A^{\frac{2}{3}} - \frac{a_C}{4} A^{\frac{5}{3}} \leq a_V A - 2^{\frac{1}{3}} a_S A^{\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{2}{3}} \frac{a_C}{4} A^{\frac{5}{3}}$$

$$\Leftrightarrow A \geq \frac{4a_S}{a_C} \cdot \frac{2^{\frac{1}{3}} - 1}{1 - 2^{-\frac{2}{3}}} \approx 72.57 \approx 73 \quad . \tag{0.10}$$

Berücksichtigt man die Annahme dass A durch 4 teilbar ist, erhält man

$$\boxed{A \geq 76} \tag{0.11}$$

Aufgabe 13

Die durch die Reaktion

$$^{257}_{100}\mathrm{Fm} + ^{1}_{0}\mathrm{n} \longrightarrow 2 \times ^{129}_{50}\mathrm{X} + \Delta\mathrm{E} \tag{0.12}$$

frei werdende (kinetische) Energie ΔE, entspricht der Differenz der Bindungsenergien der Ausgangs- und Endprodukte, das heißt

$$\begin{aligned}
\Delta E =& 2 \cdot E_B(129, 50) - E_B(257, 100) \\
=& a_V \cdot (2 \times 129 - 257) - a_S \cdot \left(2 \times 129^{\frac{2}{3}} - 257^{\frac{2}{3}}\right) - a_C \left[2 \times 50^2 \times 129^{-\frac{1}{3}} - 100^2 \times 257^{-\frac{1}{3}}\right] \\
& - a_A \cdot \left[2 \times (50 - 129/2)^2 \times 129^{-1} - (100 - 257/2)^2 \times 257^{-1}\right] \\
& + a_P \cdot \left(2 \times 0 \cdot 129^{-\frac{1}{2}} - 0 \times 257^{-\frac{1}{2}}\right) \\
& \approx 225.67 \text{ MeV} \quad .
\end{aligned} \tag{0.13}$$