# Kern- und Elementarteilchenphysik
# FSU Jena - SS 2010
# Übungsserie 03 - Lösungen

Stilianos Louca

3. Juli 2010

---

**Erinnerung: Streuung an quantenmechanischem System**

Gegeben sei ein quantenmechanisches Teilchensystem (Target) der Masse $m_s$, beschrieben durch den Hamiltonian $\hat{H}^{(\text{if})}$ und verallgemeinerten Koordinaten $\boldsymbol{\zeta}$, mit Eigenzuständen $\varphi_n$ und Energieniveaus $E_n^{(\text{if})}$. Das durch dieses System, auf ein fremdes Teilchen der Masse $m_p$ (Projektil) in Relativposition $\mathbf{r}$ wirkende Potentialfeld sei beschrieben durch $V(\mathbf{r}, \boldsymbol{\zeta})$. Ohne Wechselwirkung befinde sich das Targetsystem im Grundzustand $\varphi_0$.

Ist $E$ die Energie die Gesamtsystems im gemeinsamen Schwerpunktsystem und $m_r := m_p m_s/(m_p + m_s)$ dessen reduzierte Masse, so wird dieses in Relativkoordinaten beschrieben durch die Schrödingergleichung

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_r}\Delta_{\mathbf{r}} + \hat{H}^{(\text{if})} + V(\mathbf{r}, \boldsymbol{\zeta})\right]\Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\zeta}) = E\Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\zeta}) \quad . \tag{0.1}$$

Diese besitzt in 1. Bornscher Näherung die Lösung

$$\Phi^{(1)}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\zeta}) = \underbrace{e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r}}\varphi_0(\boldsymbol{\zeta})}_{\text{einlaufend}} + \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{f_{0n}^{(1)}(\mathbf{e}_r)\frac{e^{ik_n r}}{r}\varphi_n(\zeta)}_{\text{auslaufend}} \quad , \quad \mathbf{e}_r := \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{0.2}$$

mit der Nebenbedingung

$$E = E_0^{(\text{if})} + \frac{\hbar^2\mathbf{k}_0^2}{2m_r} = E_n^{(\text{if})} + \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m_r} \tag{0.3}$$

und

$$f_{0n}^{(1)}(\mathbf{e}_r) = -\frac{m_r}{2\pi\hbar^2}\left\langle k_n\mathbf{e}_r, n\right| V \left|\mathbf{k}_0, 0\right\rangle = -\frac{m_r}{2\pi\hbar^2}\int d^3\mathbf{r}'\ d\boldsymbol{\zeta}'\ e^{i(\mathbf{k}_0 - k_n\mathbf{e}_r)\mathbf{r}'}V(\mathbf{r}', \boldsymbol{\zeta}')\varphi_n^*(\boldsymbol{\zeta}')\varphi_0(\boldsymbol{\zeta}')$$

$$\left|\mathbf{k}, n\right\rangle(\mathbf{r}', \boldsymbol{\zeta}') := e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'}\varphi_n(\boldsymbol{\zeta}') \tag{0.4}$$

Hierbei sind $\hbar\mathbf{k}_0$ und $\hbar k_n\mathbf{e}_r$ jeweils als Impuls des einlaufenden und auslaufenden Teilchens zu interpretieren. Aus (0.3) ist zu erkennen, dass sich die Energie $E$ stets auf den inneren Target-Anregungszustand (Energie $E_n^{(\text{if})}$) und den auslaufenden Teilchenstrom (Teilchenenergie $\hbar^2 k_n^2/2m_r$) verteilt. Aus (0.2) sieht man dass je nach *Auslaufrichtung*, die *Amplitude* bzw. die entsprechende Wahrscheinlichkeit einer *Streuung* in dieser Richtung, variiert. Der Term $n = 0$ entspricht einer elastischen Streuung.

Durch Vergleich der Stromdichten

$$\mathbf{j}_{\text{in}} = \frac{\hbar\mathbf{k}_0}{m_r} \quad , \quad \mathbf{j}_{\text{out},n}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar\cdot k_n\mathbf{e}_r}{m_r r^2}\left|f_{0n}^{(1)}(\mathbf{e}_r)\right|^2 \tag{0.5}$$

der einlaufenden und auslaufenden[1] Teile in (0.2), erhält man in Richtung $\mathbf{e}$ den $n$-ten differenziellen Wirkungsquerschnitt

$$\boxed{\left(\frac{d\sigma_{0n}}{d\Omega}\right)_{\mathbf{e}} = \frac{k_n}{k_0}\left|f_{0n}^{(1)}(\mathbf{e})\right|^2 \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0} \tag{0.6}$$

[1] Projiziert auf die Beobachtungsrichtung $\mathbf{e}_r$.

(1. Bornsche Näherung, Relativkoordinaten) mit der Bestimmungsgleichung für $k_n$:

$$\boxed{E_0^{(\mathrm{if})} - E_n^{(\mathrm{if})} \overset{(0.3)}{=} \frac{\hbar^2}{2m_r}(k_0^2 - k_n^2)} \tag{0.7}$$

(Energieerhaltung). Im Falle einer elastischen Streuung ($n = 0$) an einem punktförmigen Target ($V = V(r)$), ergibt sich der differenzielle Wirkungsquerschnitt (1. Bornsche Näherung) gemäß

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathbf{q}} = \frac{m_r^2}{4\pi^2\hbar^4}\left|\int e^{i\mathbf{qr}'}V(\mathbf{r}')\ d^3\mathbf{r}'\right|^2 = \frac{4m_r^2}{\hbar^4 q^2}\left|\int_0^\infty rV(r)\sin(qr)\ dr\right|^2 \tag{0.8}$$

mit $\hbar\mathbf{q}$ als den Impulsübertrag aufgrund des Stoßes.

## Aufgabe 07

Im Falle einer Streuung am Yukawa Potential $V(r) = (\varkappa/r)e^{-\beta r}$ erhält man für $\beta > 0$, gemäß (0.8) den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathbf{q}} = \frac{4m_r^2}{\hbar^4 q^2}\left|\int_0^\infty \varkappa e^{-\beta r}\sin(qr)\ dr\right|^2 = \frac{4m_r^2\varkappa^2}{\hbar^4 q^2}\left|\Im\int_0^\infty e^{(iq-\beta)r}\ dr\right|^2$$

$$= \left[\frac{2m_r}{\hbar^2}\cdot\frac{\varkappa}{(\beta^2+q^2)}\right]^2 \tag{0.9}$$

Dieser konvergiert für $\beta \to 0$ gegen

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathbf{q}} = \left[\frac{2m_r}{\hbar^2}\cdot\frac{\varkappa}{q^2}\right]^2 \tag{0.10}$$

Ist $\vartheta$ der Streuwinkel und $E_k$ die kinetische Energie des Projektils (im Relativsystem), so ist

$$q = \frac{2}{\hbar}\sqrt{2m_r E_k}\cdot\sin\frac{\vartheta}{2} \tag{0.11}$$

und (0.9) bzw (0.10) nimmt die Form

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\vartheta} = \left[\frac{2\varkappa m_r}{\beta^2\hbar^2 + 8m_r E_k\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\right]^2 \overset{\beta=0}{=} \frac{\varkappa^2}{16E_k^2\sin^4\frac{\vartheta}{2}} = \frac{d^2}{16\sin^4\frac{\vartheta}{2}} \tag{0.12}$$

an. Im Falle $\beta = 0$, entsprich dies genau dem Rutherfordschen Streuquerschnitt im klassischen Coulomb-Potential (siehe ÜS 01)! Beachte dass der Streuwinkel $\vartheta$ im Relativsystem und Schwerpunktsystem gleich ist.

## Aufgabe 08

Nennen vorübergehend $\chi := 8m_r E_k\sin^2\frac{\vartheta}{2}$ und $\lambda := 2\varkappa m_r$. Gesucht sind die Werte $\vartheta$ (bzw. $\chi$), für die die relative Abweichung

$$\Delta := \left|\frac{\lambda^2}{(\beta^2\hbar^2+\chi)^2} - \frac{\lambda^2}{\chi^2}\right|\cdot\left(\frac{\lambda^2}{\chi^2}\right)^{-1} \tag{0.13}$$

des Streuquerschnittes vom Rutherfordschen Wert, die Schranke $\alpha$ nicht überschreitet, sprich $\Delta \overset{!}{\leq} \alpha$. Durch Umstellung von (0.13) erhält man die äquivalente Bedingung

$$\chi \overset{!}{\geq} \frac{\beta^2\hbar^2\sqrt{1-\alpha}}{1-\sqrt{1-\alpha}} \tag{0.14}$$

bzw.

$$\left|\sin\frac{\vartheta}{2}\right| \overset{!}{\geq} \frac{\beta\hbar}{\sqrt{8m_r E_k}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{1-\alpha}}{1-\sqrt{1-\alpha}}} \tag{0.15}$$

Speziell für $m_s = m_{\mathrm{Si}} = 28.09\ \mathrm{m_p},\ m_t = m_p \approx 938\ \mathrm{MeV}\cdot\mathrm{c}^{-2}$ (also $m_r \approx 905.8\ \mathrm{MeV}\cdot\mathrm{c}^{-2}$), $E_k = 100$ MeV, $\beta = 5.14\times10^{-10}$ m und $\alpha = 0.01$, erhält man durch (0.15):

$$\left|\sin\frac{\vartheta}{2}\right| \overset{!}{\gtrsim} 1.68\times10^{-4} \tag{0.16}$$

bzw. $|\vartheta| \gtrsim 0.019\ °$.

## Aufgabe 09

Seien $\mathbf{p}_e, \mathbf{p}_\gamma$ und $\widetilde{\mathbf{p}}_e, \widetilde{\mathbf{p}}_\gamma$ jeweils die Impulse des Elektrons & Photons vor und nach der Streuung (o.B.d.A. $p_e = 0$), $E_e, E_\gamma$ und $\widetilde{E}_e, \widetilde{E}_\gamma$ deren Energien vor und nach der Streuung. Dabei seien $\vartheta_e, \vartheta_\gamma$ die jeweiligen Ablenkwinkel bzgl. der ursprünglichen Photonen-Einfallrichtung (siehe Abb. 0.1).

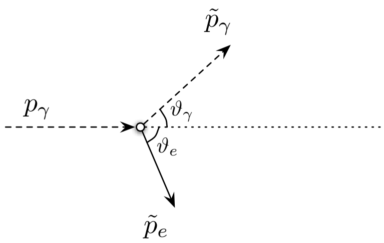


**Abbildung 0.1:** Zur Compton Streuung an einem freien, ruhenden Elektron.

Aus der Impulserhaltung

$$\mathbf{p}_e + \mathbf{p}_\gamma = \widetilde{\mathbf{p}}_e + \widetilde{\mathbf{p}}_\gamma \tag{0.17}$$

folgt insbesondere

$$\widetilde{p}_e \cos\vartheta_e = p_\gamma - \widetilde{p}_\gamma \cos\vartheta_\gamma \tag{0.18}$$

und

$$\widetilde{p}_e \sin\vartheta_e = -\widetilde{p}_\gamma \sin\vartheta_\gamma \quad . \tag{0.19}$$

Quadrieren und Summieren von (0.18) und (0.19) liefert

$$\widetilde{p}_e^2 = (p_\gamma - \widetilde{p}_\gamma\cos\vartheta_\gamma)^2 + \widetilde{p}_\gamma^2 \sin^2\vartheta_\gamma = p_\gamma^2 + \widetilde{p}_\gamma^2 - 2p_\gamma\widetilde{p}_\gamma\cos\vartheta_\gamma \tag{0.20}$$

bzw.

$$\widetilde{E}_e^2 - m_e^2c^4 = E_\gamma^2 + \widetilde{E}_\gamma^2 - 2E_\gamma\widetilde{E}_\gamma\cos\vartheta_\gamma \tag{0.21}$$

Zusammen mit Energieerhaltung

$$\underbrace{E_e}_{m_ec^2} + E_\gamma = \widetilde{E}_e + \widetilde{E}_\gamma \tag{0.22}$$

liefert dies

$$m_ec^2(E_\gamma - \widetilde{E}_\gamma) = E_\gamma\widetilde{E}_\gamma(1-\cos\vartheta_\gamma) \tag{0.23}$$

bzw.

$$\boxed{\widetilde{E}_\gamma = \frac{E_\gamma m_e c^2}{m_e c^2 + E_\gamma(1-\cos\vartheta_\gamma)}} \tag{0.24}$$

Die kinetische Energie $\widetilde{E}_{e,k}$ des Elektrons nach der Streuung erhält man entsprechend

$$\widetilde{E}_{e,k} = \widetilde{E}_e - m_e c^2 = E_\gamma - \widetilde{E}_\gamma \overset{(0.24)}{=} \frac{E_\gamma^2(1-\cos\vartheta_\gamma)}{m_e c^2 + E_\gamma(1-\cos\vartheta_\gamma)} \quad .$$