Kern- und Elementarteilchenphysik
FSU Jena - SS 2010
Übungsserie 02 - Lösungen

Stilianos Louca

5. Mai 2010

Aufgabe 03

Unter der Annahme eines vollständig inelastischen Stoßes ($\rightarrow$ maximaler *Verlust* kinetischer Energie[1]), beschreiben folgende Bedingungen den Prozess:

a) Erhaltung des Gesamtimpulses $\mathbf{p}$ des Schwerpunktes.

b) Massen m_1 und m_2 besitzen nach dem Stoß die gleiche Geschwindigkeit $\mathbf{v}'$.

Aus den beiden Bedingungen folgt sofort die Beziehung

$$\mathbf{v}' = \frac{m_1 \mathbf{v}}{m} \quad . \tag{0.1}$$

mit $m := m_1 + m_2$ als Gesamtmasse des Systems. Die gesamt-kinetische Energie E'_{kin} nach dem Stoß erhält man dementsprechend gemäß

$$E'_{\text{kin}} = \frac{m_1^2}{2m}\mathbf{v}^2 = \frac{m_1}{m} \cdot E_{\text{kin}} \tag{0.2}$$

mit E_{kin} als kinetische Energie vor dem Stoß. Die Differenz $E_{\text{kin}} - E'_{\text{kin}} = \frac{m_2}{m} E_{\text{kin}}$ wurde zum *Verschmelzen* der beiden Teilchen aufgebraucht, steckt also in deren Wechselwirkung.

Aufgabe 04

Nennen $m := m_1 + m_2$. Seien E_1, E_2 bzw. $\widetilde{E}_1, \widetilde{E}_2$ die einzelnen Teilchenenergien im Labor- bzw. Schwerpunktsystem und p_1, p_2 bzw. $\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2$ die entsprechenden Impulse. Seien $\widetilde{E} := \widetilde{E}_1 + \widetilde{E}_2$ bzw. $E := E_1 + E_2$ jeweils die Gesamtenergien im Schwerpunkt- bzw. Laborsystem, $\widetilde{p} := \widetilde{p}_1 + \widetilde{p}_2$ und $p := p_1 + p_2$ jeweils die entsprechenden Gesamtimpulse. Über die Invarianz von $E^2 - p^2c^2$ erhält man

$$\begin{aligned}
\widetilde{E} &= \sqrt{E^2 - p^2c^2 + \widetilde{p}^2} \overset{\widetilde{p}=0}{=} \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 - p_1^2c^2 - p_2^2c^2 - 2p_1p_2c^2} \\
&\overset{p_2=0}{=} \sqrt{m_1^2c^4 + m_2^2c^4 + 2E_1m_2c^2} = \sqrt{(m_1^2 + m_2^2)c^4 + 2(m_1c^2 + E_{1,\text{kin}})m_2c^2} \\
&= \sqrt{(m_1 + m_2)^2c^4 + 2m_2c^2E_{1,\text{kin}}}
\end{aligned} \tag{0.3}$$

---

[1] Sind $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ und $\widetilde{\mathbf{v}}_1, \widetilde{\mathbf{v}}_2$ die Geschwindigkeiten zweier stoßenden Teilchen mit Massen m_1, m_2, so führt das Maximierungsproblem für

$$E(\widetilde{\mathbf{v}}_1, \widetilde{\mathbf{v}}_2) = m_1\mathbf{v}_1^2 + m_2\mathbf{v}_2^2 - m_1\widetilde{\mathbf{v}}_1^2 - m_2\widetilde{\mathbf{v}}_2^2$$

unter der Nebenbedingung

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\widetilde{\mathbf{v}}_1 + m_2\widetilde{\mathbf{v}}_2$$

auf

$$\widetilde{\mathbf{v}}_1 = \widetilde{\mathbf{v}}_2 = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} \quad .$$

sprich

$$\boxed{\widetilde{E} = \sqrt{m^2c^4 + 2m_2c^2E_{1,\mathrm{kin}}} \quad .} \tag{0.4}$$

Im nicht-relativistischen Grenzfall $E_{1,\mathrm{kin}} \ll mc^2$ geht (0.4) über in

$$\widetilde{E} = mc^2\sqrt{1 + \frac{2m_2E_{1,\mathrm{kin}}}{m^2c^2}} \approx mc^2 + \frac{m_2}{m}E_{1,\mathrm{kin}} \approx mc^2 + \frac{m_r}{2}\mathbf{v}^2 \tag{0.5}$$

was genau den klassischen Erwartungen entspricht! Im ultra-relativistischen Grenzfall $E_{1,\mathrm{kin}} \gg mc^2$ erhält man

$$\widetilde{E} \approx \sqrt{2m_2c^2 \cdot E_{1,\mathrm{kin}}} \ll E_{1,\mathrm{kin}} \tag{0.6}$$

Zu erkennen ist: Die in ultra-relativistische Stößen zur Verfügung stehende Energie, ist im Falle eines ruhenden Targets unterproportional zur kinetischen Energie des Projektils!

Aufgabe 05

Bewegt sich ein (nicht-relativistisches) geladenes Teilchen der Masse m und Ladung q mit einer Geschwindigkeit v senkrecht zu einem Magnetfeld B, so beschreibt dieses bekanntlich eine Kreisbahn mit Radius R und Frequenz ν. Letztere ist die bekannte *Zyklotron*-Frequenz, gegeben durch

$$\nu = \frac{|q|\,B}{2\pi m} \quad . \tag{0.7}$$

Im Falle von Deuteronen ($m \approx 3.3 \times 10^{-27}$ Kg, $q \approx 1.6 \times 10^{-19}$ C) und einer vorgegebenen Zyklotronfrequenz $\nu_0 = 10$ MHz, erfordert dies ein Magnetfeld $B \approx 1.29$ T. Bahnradius R und kinetische Energie E_k hängen über

$$E_k = \frac{m}{2}\mathrm{v}^2 = \frac{m}{2}(2\pi\nu R)^2$$

zusammen. Unter der Einschränkung $R \overset{!}{\leq} r_0 = 0.5$ m ergibt sich eine maximal erreichbare kinetische Energie von $E_k^{\max} \approx 10$ MeV.

Aufgabe 06

Durch die Forderung, dass die de Broglie Wellenlänge $\lambda = h/p$ der Elektronen kleiner als 1 fm ist, erhält man die minimale Energie

$$E_{\min} = \sqrt{p_{\min}^2c^2 + m_e^2c^4} = m_ec^2 \cdot \sqrt{\frac{h^2}{m_e^2c^2\lambda_{\max}^2} + 1} \approx 2.43 \times 10^3\ m_ec^2 \approx 1.24 \times 10^3\ \mathrm{MeV}$$