Kern- und Elementarteilchenphysik
FSU Jena - SS 2010
Übungsserie 01 - Lösungen

Stilianos Louca

15. April 2010

Aufgabe 01

Im Schwerpunktsystem ist der Ablenkwinkel $\vartheta(b)$ im Falle eines radialen Wechselwirkungspotentials $V = V(r)$ gegeben durch

$$\vartheta(b) = \pi - 2b \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{V(r)}{E_r}}} \tag{0.1}$$

wobei E_r die (erhaltene) Energie der reduzierten Masse im relativ-System[1] und $r_{\min}$ implizit durch

$$1 - \frac{b^2}{r_{\min}^2} - \frac{V(r_{\min})}{E_r} \overset{!}{=} 0 \tag{0.2}$$

definiert ist. Im Falle $V(r) = E_r d/r$ mit $d = Z_1 Z_2 e^2/(4\pi\varepsilon_0 E_r)$ erhält man aus (0.2)

$$r_{\min} = \frac{1}{2}\left(d + \sqrt{d^2 + 4b^2}\right) \tag{0.3}$$

und aus (0.1):

$$\vartheta(b) = \pi - 2b \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r\sqrt{r^2 - rd - b^2}} \overset{[1]}{=} \pi - 2b \left\{ -\frac{1}{b} \arcsin\left[\frac{rd + 2b^2}{r\sqrt{d^2 + 4b^2}}\right]\right\} \Bigg|_{r_{\min}}^{\infty}$$

$$\overset{(0.3)}{=} 2\arcsin\left[\frac{d}{\sqrt{d^2 + 4b^2}}\right] = 2\arcsin\left[\frac{1}{\sqrt{1 + (2b/d)^2}}\right] = 2\,\mathrm{arccot}\left[\frac{2b}{d}\right] \tag{0.4}$$

bzw.

$$b = \frac{d}{2}\cot(\vartheta/2) \tag{0.5}$$

Entsprechend ergibt sich im Schwerpunktsystem ein differentieller Streuquerschnitt gemäß

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\vartheta} = \frac{b}{\sin\vartheta}\left|\frac{db}{d\vartheta}\right| \overset{(0.5)}{=} \frac{b}{\sin\vartheta} \cdot \frac{d}{4} \frac{1}{\sin^2(\vartheta/2)} = \frac{d^2}{16\sin^4(\vartheta/2)} \tag{0.6}$$

bzw.

$$\left.\frac{d\sigma}{d\vartheta}\right|_{\vartheta} = 2\pi b \left|\frac{db}{d\vartheta}\right| = \frac{\pi d^2}{4} \frac{\cos(\vartheta/2)}{\sin^3(\vartheta/2)} \tag{0.7}$$

[1] $E_r = m_r \mathbf{r}^2/2 + V(\mathbf{r})$ wobei $m_r := m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ und $\mathbf{r} := \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.

Aufgabe 02

Nennen $\mathbf{r}_l = (x_l^1, x_l^2, x_l^3),\ l = 1,2$ und führen die Koordinaten $\mathbf{r} := \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_s := (m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2)/(m_1 + m_2)$ ein, wobei wir beachten dass für lineare Transformationen gilt:

$$\partial_{x_l^i} = \underbrace{\frac{\partial x^j}{\partial x_l^i}}_{\text{const}} \cdot \partial_{x^j} + \underbrace{\frac{\partial x_s^j}{\partial x_l^i}}_{\text{const}} \cdot \partial_{x_s^j} \quad , \quad l = 1,2,\ i = 1,2,3$$

$$\partial_{x_l^i}^2 = \left(\frac{\partial x^k}{\partial x_l^i} \cdot \partial_{x^k} + \frac{\partial x_s^k}{\partial x_l^i} \cdot \partial_{x_s^k} \right) \partial_{x_l^i}$$

$$= \frac{\partial x^k}{\partial x_l^i} \frac{\partial x^j}{\partial x_l^i} \partial_{x^k x^j} + 2 \frac{\partial x^k}{\partial x_l^i} \frac{\partial x_s^j}{\partial x_l^i} \partial_{x^k x_s^j} + \frac{\partial x_s^k}{\partial x_l^i} \frac{\partial x_s^j}{\partial x_l^i} \partial_{x_s^k x_s^j}$$

Im Kontext obiger speziellen Transformation, gilt

$$\frac{\partial(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s)}{\partial(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)} = \begin{pmatrix} 1_{3\times3} & -1_{3\times3} \\ (m_1/m) \cdot 1_{3\times3} & (m_2/m) \cdot 1_{3\times3} \end{pmatrix} \quad , \tag{0.8}$$

wobei $m := m_1 + m_2$, so dass insbesondere

$$\Delta_{\mathbf{r}_1} = \sum_{i=1}^{3} \delta_i^k \delta_i^j \left[\partial_{x^k x^j} + 2\frac{m_1}{m} \partial_{x^k x_s^j} + \frac{m_1^2}{m^2} \partial_{x_s^k x_s^j} \right] = \Delta_{\mathbf{r}} + 2\frac{m_1}{m} (\nabla_{\mathbf{r}})^T \nabla_{\mathbf{r}_s} + \frac{m_1^2}{m^2} \Delta_{\mathbf{r}_s} \tag{0.9}$$

und

$$\Delta_{\mathbf{r}_2} \overset{\text{analog}}{=} \Delta_{\mathbf{r}} - 2\frac{m_2}{m} (\nabla_{\mathbf{r}})^T \nabla_{\mathbf{r}_s} + \frac{m_2^2}{m^2} \Delta_{\mathbf{r}_s} \quad . \tag{0.10}$$

Anwendung von (0.9) und (0.10) auf die Schrödingergleichung

$$i\hbar\partial_t \psi = \underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m_1} \Delta_{\mathbf{r}_1} - \frac{\hbar^2}{2m_2} \Delta_{\mathbf{r}_2} + V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \right)}_{\hat{H}} \psi \quad , \tag{0.11}$$

liefert sofort

$$i\hbar\partial_t \psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m_1} \left(\Delta_{\mathbf{r}} + \frac{m_1^2}{m^2} \Delta_{\mathbf{r}_s} \right) - \cancel{\frac{\hbar^2}{m} (\nabla_{\mathbf{r}})^T \nabla_{\mathbf{r}_s}} - \frac{\hbar^2}{2m_2} \left(\Delta_{\mathbf{r}} + \frac{m_2^2}{m^2} \Delta_{\mathbf{r}_s} \right) + \cancel{\frac{\hbar^2}{m} (\nabla_{\mathbf{r}})^T \nabla_{\mathbf{r}_s}} + V(\mathbf{r}) \right] \psi$$

$$= \left[-\frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \Delta_{\mathbf{r}} - \frac{\hbar^2}{2m^2} (m_1 + m_2) \Delta_{\mathbf{r}_s} + V(\mathbf{r}) \right] \psi$$

$$= \left[-\frac{\hbar^2}{2m_r} \Delta_{\mathbf{r}} - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\mathbf{r}_s} + V(\mathbf{r}) \right] \psi \tag{0.12}$$

wobei $m_r := m_1 m_2 / m$ die so genannte *reduzierte Masse* ist. Setzt man

$$\hat{H}_{\mathbf{r}} := -\frac{\hbar^2}{2m_r} \Delta_{\mathbf{r}} + V(\mathbf{r}) \quad , \quad \hat{H}_{\mathbf{r}_s} := -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\mathbf{r}_s} \tag{0.13}$$

so lässt sich schreiben $\hat{H} = \hat{H}_{\mathbf{r}} + \hat{H}_{\mathbf{r}_s}$.

Literatur

[1] *Taschenbuch Mathematischer Formeln*, H.J. Bartsch
Fachbuchverlag Leipzig, 2004