Höhere Analysis, II

11. & letzte Übungsserie

V-13 In Lemma 5.42 der Vorlesung wurde für $A \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$, $A = A^*$, wurde die Existenz eines Projektors P_+ gezeigt, so dass $A_+ := AP_+ \geq 0$, und $A_- := A - AP_+ \leq 0$ gelten.

(a) Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$, $A = A^*$, $A \geq 0$. Beweisen Sie, dass dann gilt $A = A_+$, $A_- = 0$.

(b) Sei $T : \ell_2^2 \to \ell_2^2$ gegeben durch die Matrix

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie T_+ und T_-.

(c) Sei $A = \mathrm{id}_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$. Bestimmen Sie dafür $(A - \lambda \,\mathrm{id}_{\mathbb{H}})_+$, $\mathbf{N}\left((A - \lambda \,\mathrm{id}_{\mathbb{H}})_+\right)$, B_λ mit $B_\lambda^2 = (A - \lambda \,\mathrm{id}_{\mathbb{H}})^2$, sowie E_λ gemäß Satz 5.43.

V-14 **(a)** Sei $M : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ der Multiplikationsoperator zu $\varphi(t) = t$, d.h. $M : f(x) \mapsto xf(x)$, $x \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass für die zu M gehörige Spektralschar gilt:

$$E_\lambda f = \begin{cases} 0, & \lambda < 0, \\ f\chi_{[0,\lambda)}, & 0 \leq \lambda \leq 1, \\ f, & \lambda > 1. \end{cases}$$

(b) Sei $A : \ell_2 \to \ell_2$ gegeben durch $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto Ax = \left(\frac{x_k}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Bestimmen Sie die Spektralfamilie zu A.

(c) Sei $D_\alpha : \ell_2 \to \ell_2$ gegeben durch $x = (x_k)_k \mapsto D_\alpha x = (\alpha_k x_k)_k$, wobei $(\alpha_k)_k \subset [a,b] \subset \mathbb{R}$ für ein Intervall $[a,b]$ gelte. Beweisen Sie, dass die Spektralfamilie durch

$$\langle E_\lambda x, y \rangle_{\mathbb{H}} = \sum_{\alpha_k < \lambda} x_k \overline{y_k}$$

gegeben ist.

V-15 Seien A ein halbbeschränkter Operator, $\langle Ax, x \rangle_{\mathbb{H}} \geq c\|x\|_{\mathbb{H}}^2$, $x \in \mathbf{D}(A)$, mit $A = A^*$. Beweisen Sie, dass die eindeutig bestimmte Spektralschar $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ zu seiner Darstellung dann $E_\lambda = 0$ für $\lambda \leq c$ erfüllt, und somit die Darstellung gilt

$$Ax = \int\limits_{[c,\infty)} \lambda \,\mathrm{d}E_\lambda x, \quad x \in \mathbf{D}(A).$$