Höhere Analysis 2
FSU Jena - SS 2011
Serie 10 - Lösungen

Stilianos Louca

6. Juli 2011

Definition: Spektrum eines Operators

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ ein Teilraum und $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein linearer Operator. Wir definieren:

$$\begin{aligned}
&\rho(A) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{N}(\lambda - A) = \{0\}\,,\ \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} = \mathcal{H},\ (\lambda - A)^{-1} \text{ beschränkt}\right\} \\
&\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A) \\
&\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < \dim \mathcal{N}(\lambda - A) < \infty\} \\
&\sigma_p^*(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < \dim \mathcal{N}(\lambda - A)\} \\
&\sigma_e(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists \text{ Weylsche Folge für } \lambda \text{ und } A\}\,.
\end{aligned} \tag{0.1}$$

Wir erinnern dass für selbstadjungierte Operatoren $A = A^\dagger$ gilt

$$\rho(A) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \exists\ (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\right\}. \tag{0.2}$$

Hilfssatz zu selbstadjungierten Operatoren

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ ein dichter Teilraum und $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter, linearer Operator. Sei $\lambda \in \sigma_p(A)$. Dann ist $D(\widetilde{A}) := D(A) \cap \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)}$ dicht in $\widetilde{\mathcal{H}} := \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)}$. Der Operator $\widetilde{A} := A\big|_{D(\widetilde{A})}$ ist selbstadjungiert in $\widetilde{\mathcal{H}}$. Er erfüllt $\mathcal{R}(\lambda - \widetilde{A}) = \mathcal{R}(\lambda - A)$ sowie $\sigma_e(\widetilde{A}) = \sigma_e(A)$.

Beweis: Beachte dass

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} \oplus \mathcal{N}(\lambda - A). \tag{0.3}$$

Es sei $\Pi : \mathcal{H} \to \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)}$ die Orthogonalprojektion auf $\overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} = \mathcal{N}(\lambda - A)^\perp$.

- Beachte dass tatsächlich $\mathcal{R}(\widetilde{A}) \subseteq \widetilde{\mathcal{H}}$.
- Wir zeigen die Dichtheit von $D(\widetilde{A})$ in $\widetilde{\mathcal{H}}$. Sei $y \in \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)}$, dann existiert nach Dichtheit von $D(A)$ eine Folge $(x_n)_n \subseteq D(A)$ mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$. Wegen

$$\|x_n - y\| = \|\underbrace{\Pi x_n - y}_{\in \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)}} + \underbrace{(1 - \Pi)x_n}_{\perp \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)}}\| = \|\Pi x_n - y\| + \|(1 - \Pi)x_n\| \tag{0.4}$$

  muss gelten $\widetilde{x}_n := \Pi x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$. Dabei ist $\widetilde{x}_n$ als Differenz von $x_n \in D(A)$ und $(1-\Pi)x_n \in \mathcal{N}(\lambda - A) \subseteq D(A)$ auch in $D(A)$ und somit sogar in $D(\widetilde{A})$.

- Wir zeigen dass $\widetilde{A} : D(\widetilde{A}) \to \widetilde{\mathcal{H}}$ selbstadjungiert ist. Für $y \in D(\widetilde{A})$ gilt auf jeden Fall $A^\dagger y = Ay \in \widetilde{\mathcal{H}}$ und erfüllt $\langle \widetilde{A}x, y\rangle = \langle x, A^\dagger y\rangle$ für alle $x \in D(\widetilde{A}) \subseteq D(A)$. Daher ist $D(\widetilde{A}) \subseteq D(\widetilde{A}^\dagger)$ mit $\widetilde{A}^\dagger\big|_{D(\widetilde{A})} = A\big|_{D(\widetilde{A})} = \widetilde{A}$. Nun sei anderseits $y \in \widetilde{\mathcal{H}}$ und $y^\dagger \in \widetilde{\mathcal{H}}$ so dass $\langle \widetilde{A}x, y\rangle = \langle x, y^\dagger\rangle$ für alle $x \in D(\widetilde{A})$. Wir zeigen dass sogar

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, y^\dagger\rangle \tag{0.5}$$

für alle $x \in D(A)$ gilt. Darauf würde nämlich folgen $y \in D(A^\dagger) = D(A)$ bzw. $y \in D(\widetilde{A})$, so dass $D(\widetilde{A}^\dagger) \subseteq D(\widetilde{A})$. Dabei genügt es (0.5) für $x \in \mathcal{N}(\lambda - A)$ zu zeigen, denn nach (0.3) gilt die Zerlegung[1]

$$D(A) = \left[D(A) \cap \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)}\right] \oplus \mathcal{N}(\lambda - A). \tag{0.6}$$

Doch für $x \in \mathcal{N}(\lambda - A)$ ist (0.5) trivial, da $x \perp y^\dagger$ und $Ax = 0$.

- Wir zeigen dass $\lambda \in \sigma_e(A)$ genau dann wenn $\lambda \in \sigma_e(\widetilde{A})$. Die Richtung "$\Leftarrow$" ist trivial, da A eine Erweiterung von $\widetilde{A}$ ist. Sei nun $\lambda \in \sigma_e(A)$, dazu eine Weylsche Folge $(x_n)_n \subseteq D(A)$. Wir setzen $\widetilde{x}_n := \Pi x_n$, dann ist jedes $\widetilde{x}_n$ als Differenz von $x_n \in D(A)$ und $(1 - \Pi)x_n \in \mathcal{N}(\lambda - A)$ auch in $D(A)$, daher sogar in $D(\widetilde{A})$. Da Π stetig ist, sind $(\widetilde{x}_n)_n$ sowie $(x_n - \widetilde{x}_n)_n = ((1 - \Pi)x_n)_n$ beschränkt. Beachte dass $\dim \mathcal{N}(\lambda - A) < \infty$ nach Voraussetzung $\lambda \in \sigma_p(A)$, so dass $(x_n - \widetilde{x}_n)_n \subseteq \mathcal{N}(\lambda - A)$ sogar total beschränkt ist. Wegen

$$\underbrace{(\lambda - A)x_n}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0} = \underbrace{(\lambda - A)\widetilde{x}_n}_{(\lambda - \widetilde{A})\widetilde{x}_n} + \underbrace{(\lambda - A)(1 - \Pi)x_n}_{0} \tag{0.7}$$

gilt auch $(\lambda - A)\widetilde{x}_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Schließlich ist $(\widetilde{x}_n)_n$ nicht total beschränkt, da sonst wegen der total-Beschränktheit von $(x_n - \widetilde{x}_n)_n \subseteq \mathcal{N}(\lambda - A)$ auch $(x_n)_n$ total beschränkt wäre, ein Widerspruch! Daher ist $(\widetilde{x}_n)_n$ eine Weylsche Folge zu $(\lambda - \widetilde{A})$.

- Wir zeigen schließlich $\mathcal{R}(\lambda - \widetilde{A}) = \mathcal{R}(\lambda - A)$. Die Inklusion "$\subseteq$" ist trivial. Ist anderseits $y \in \Re(\lambda - A)$, das heißt $y = (\lambda - A)x$ für irgendein $x \in D(A)$, so ist $\Pi x \in D(\widetilde{A})$ (Argumentation ähnlich wie oben) und

$$(\lambda - \widetilde{A})\Pi x = \underbrace{(\lambda - A)x}_{y} - (\lambda - A)\underbrace{(1 - \Pi)x}_{\in \mathcal{N}(\lambda - A)} = y, \tag{0.8}$$

also $y \in \mathcal{R}(\lambda - \widetilde{A})$.

□

Aufgabe V-10

Wir erinnern an die allgemeine Eigenschaft

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{R}(A)} \oplus \mathcal{N}(A^\dagger) \tag{0.9}$$

für jeden dicht-definierten, linearen Operator $A : D(A) \to \mathcal{H}$. Es sei nun $A = A^\dagger$. Die Bedingungen (i) bis (v) sind einander komplementär, so dass die Implikationen zu zeigen wären. Bekanntlich gilt $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$, so dass wir ab nun nur die Fälle $\lambda \in \mathbb{R}$ betrachten.

(i) Es sei $\mathcal{R}(\lambda - A) = \mathcal{H}$, dann gilt nach (0.9) $\mathcal{N}(\lambda - A) = \{0\}$, sprich $(\lambda - A) : D(\lambda - A) \to \mathcal{H}$ ist bijektiv. Da A abgeschlossen ist, ist auch seine Inverse abgeschlossen. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Operator ist $(\lambda - A)^{-1}$ stetig und daher $\lambda \in \rho(A)$.

(ii) Nach (0.9) gilt $\mathcal{N}(\lambda - A) = \{0\}$, so dass schon mal $\lambda \notin \sigma_p(A)$ ist. Wir nehmen an es gäbe keine Weylsche Folge für $(\lambda - A)$, dann muss $(\lambda - A)^{-1} : \mathcal{R}(\lambda - A) \to \mathcal{H}$ beschränkt sein[2]. Wir zeigen dass dann $\mathcal{R}(\lambda - A)$ abgeschlossen wäre, ein Widerspruch! Tatsächlich, sei $y \in \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)}$, das heißt $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ für irgendwelche $y_n := (\lambda - A)x_n$, $x_n \in D(\lambda - A)$. Dann ist $(y_n)_n$ Cauchy und nach Beschränktheit von $(\lambda - A)^{-1}$ auch $(x_n)_n$ Cauchy. Es existiert also $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathcal{H}$. Da $(\lambda - A)$ abgeschlossen ist, gilt $x \in D(\lambda - A)$ und $(\lambda - A)x = y$, sprich $y \in \mathcal{R}(\lambda - A)$.

[1] Sei X ein linearer Raum und $U, V, W \subseteq X$ Teilräume mit $X = U \oplus V$ und $V \subseteq W$. Dann gilt $W = (W \cap U) \oplus V$.

[2] Wir erinnern: Sind X, Y Banachräume, $T : D(T) \subseteq X \to Y$ ein linearer, injektiver, abgeschlossener Operator und T^{-1} unbeschränkt, so existiert eine Weylsche Folge für T.

(iii) Nach (0.9) gilt $0 < \dim \mathcal{N}(\lambda - A) < \infty$, so dass schonmal $\lambda \in \sigma_p(A)$. Wir definieren

$$\widetilde{A} : D(\widetilde{A}) := D(A) \cap \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} \to \widetilde{\mathcal{H}} := \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} \tag{0.10}$$

wie im vorigen Hilfssatz. Dann ist $\widetilde{A}$ selbstadjungiert auf dem Hilbertraum $\widetilde{\mathcal{H}}$ und

$$\mathcal{R}(\lambda - \widetilde{A}) = \mathcal{R}(\lambda - A) = \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} = \widetilde{\mathcal{H}}, \tag{0.11}$$

so dass nach Fall (i) folgt $\lambda \in \rho(\widetilde{A})$. Insbesondere also $\lambda \notin \sigma_e(\widetilde{A}) = \sigma_e(A)$.

(iv) Nach (0.9) gilt $0 < \dim \mathcal{N}(\lambda - A) < \infty$, so dass schonmal $\lambda \in \sigma_p(A)$. Wir definieren $\widetilde{A}$ wie in Punkt (iii) bzw. im vorigen Hilfssatz. Dann gilt

$$\mathcal{R}(\lambda - \widetilde{A}) = \mathcal{R}(\lambda - A) \subsetneq \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} = \widetilde{\mathcal{H}} \tag{0.12}$$

und

$$\overline{\mathcal{R}(\lambda - \widetilde{A})} = \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} = \widetilde{\mathcal{H}}. \tag{0.13}$$

Nach Fall (ii) gilt daher $\lambda \in \sigma_e(\widetilde{A}) = \sigma_e(A)$.

(v) Nach (0.9) gilt $\dim \mathcal{N}(\lambda - A) = \infty$ und daher schonmal $\lambda \notin \sigma_p(A)$. Wähle $(x_n)_n \subseteq \mathcal{N}(\lambda - A)$ beschränkt und nicht total beschränkt. Dann gilt $(\lambda - A)x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, sprich $(x_n)_n$ ist Weylsch zu $(\lambda - A)$.

□

Aufgabe V-11

(a) Nach Aufgabenhinweis betrachten wir die Operatorenfolge $(A_n)_n \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ definiert durch $A_1 := \frac{A_1}{\|A_1\|}$ und $A_{n+1} := A_n - A_n^2$. Beachte dass $A_n = A_n^\dagger$ und daher $\|A_n\| = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle$.

- Wir zeigen induktiv dass $0 \leq \langle A_n x, x\rangle \leq \|x\|^2 \ \forall x \in \mathcal{H}$, sprich $A_n \geq 0$ und $\|A_n\| \leq 1$, für jedes $n \in \mathbb{N}$. Da $\|A_1\| = 1$ und $A_1 \geq 0$ ist die Aussage zunächst für $n = 1$ gültig. Nehme an $A_n \geq 0$ und $\|A_n\| \leq 1$, dann gilt auch $\langle (1 - A_n)x, x\rangle = \|x\|^2 - \langle A_n x, x\rangle \in [0, \|x\|^2] \ \forall x \in \mathcal{H}$, sprich $\|1 - A_n\| \leq 1$ und $(1 - A_n) \geq 0$. Folglich gilt

$$\langle A_{n+1}x, x\rangle = \langle A_n(1 - A_n)x, x\rangle \leq \|A_n(1 - A_n)x\| \cdot \|x\| \leq \underbrace{\|A_n\| \cdot \|1 - A_n\|}_{\leq 1} \cdot \|x\|^2 \leq \|x\|^2 . \tag{0.14}$$

  Wir betrachten nun auf $\mathcal{H}$ das nicht-negativ definite *Pseudoskalarprodukt* $[x, y] := \langle A_n x, y\rangle$. Nach Cauchy-Schwarz gilt

$$[x, y]^2 \leq [x, x] \cdot [y, y] , \tag{0.15}$$

  das heißt

$$\langle A_n x, y\rangle^2 \leq \langle A_n x, x\rangle \cdot \langle A_n y, y\rangle \tag{0.16}$$

  für alle $x, y \in \mathcal{H}$. Für $y := A_n x$ folgt daraus

$$\left\langle A_n^2 x, x\right\rangle^2 \leq \langle A_n x, x\rangle \cdot \underbrace{\langle A_n(A_n x), A_n x\rangle}_{\leq \|A_n x\|^2 = \langle A_n^2 x, x\rangle} \leq \langle A_n x, x\rangle \left\langle A_n^2 x, x\right\rangle , \tag{0.17}$$

  das heißt $\left\langle A_n^2 x, x\right\rangle \leq \langle A_n x, x\rangle$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Dies zeigt dass $A_n^2 \leq A_n$ bzw. $A_{n+1} \geq 0$.

- Wir zeigen $A_n x \xrightarrow{n\to\infty} 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Da $A_{n+1} \leq A_n$ ist die Folge $\langle A_n x, x\rangle \geq 0$ monoton fallend in n, das heißt es existiert der Grenzwert $\alpha := \lim\limits_{n\to\infty} \langle A_n x, x\rangle$. Folglich

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n x\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left\langle A_n^2 x, x\right\rangle = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \langle A_n x, x\rangle}_{\alpha} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} \langle A_{n+1} x, x\rangle}_{\alpha} = 0, \tag{0.18}$$

  was zu zeigen war.

- Wir zeigen dass $A_1x = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n A_k^2 x$. Tatsächlich ist $\sum_{k=1}^n A_k^2 = (A_1 - A_2) + .. + (A_n - A_{n+1}) = A_1 - A_{n+1}$, so dass nach voriger Überlegung $\sum_{k=1}^n A_k^2 x = A_1 x - A_{n+1}x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} A_1 x$.
- Wir zeigen $AB \geq 0$. Wir definieren für B analog die Folge $(B_n)_n$ nicht-negativer, selbstadjungierter Operatoren und beachten dass $A_k B_j = B_j A_k$ für alle $k, j \in \mathbb{N}$. Für $x \in \mathcal{H}$ folgt dann

$$\langle ABx, x\rangle = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^m \underbrace{\langle A_k^2 B_j^2 x, x\rangle}_{\langle A_k B_j x, B_j^\dagger A_k^\dagger x\rangle} = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^m \underbrace{\langle A_k B_j x, A_k B_j x\rangle}_{\geq 0} \geq 0 \tag{0.19}$$

wie gewünscht.

(b) (i) Wir nennen $T := A - B$ und zeigen $CP = PC$, mit P als Orthogonalprojektion auf $\mathcal{N}(T)$, wobei $CT = TC$. Wir beachten dass $T^\dagger = T$ und $\mathcal{H} = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{N}(T)^\perp$.

- Wir zeigen $CP = PC$ auf $\mathcal{N}(T)^\perp$. Sei $x \in \mathcal{N}(T)^\perp$, dann gilt $Px = 0$ und daher $CPx = 0$. Zu zeigen wäre nun dass auch $PCx = 0$, das heißt $Cx \in \mathcal{N}(T)^\perp$. Da T selbstadjungiert ist, gilt $\mathcal{N}(T)^\perp = \overline{\mathcal{R}(T)}$, so dass zu zeigen wäre $C(\overline{\mathcal{R}(T)}) \subseteq \overline{\mathcal{R}(T)}$. Da C, T kommutieren gilt $C(\mathcal{R}(T)) \subseteq \mathcal{R}(T)$. Da C stetig ist, gilt sogar $C(\overline{\mathcal{R}(T)}) \subseteq \overline{\mathcal{R}(T)}$ wie gewünscht.
- Wir zeigen $CP = PC$ auf $\mathcal{N}(T)$. Sei $x \in \mathcal{N}(T)$, dann gilt $Px = x$ und $CPx = Cx$. Zu zeigen wäre nun $PCx = Cx$, sprich $Cx \in \mathcal{N}(T)$. Tatsächlich gilt $TCx = CTx = 0$, wie gewünscht.

(ii) Da $B(A - B) = (A - B)B$, folgt nach Teil (a) dass $BP = PB$ und daher $(2P - 1)B = B(2P - 1)$. Analog auch $AP = PA$.

- Wir zeigen $A = B(2P - 1)$ auf $\mathcal{N}(A - B)$. Tatsächlich gilt für $x \in \mathcal{N}(A - B)$: $B(2P - 1)x = B(2Px - x) = B(2x - x) = Bx = Ax$.
- Wir zeigen $A = (2P - 1)B$ auf $\mathcal{N}(A - B)^\perp = \overline{\mathcal{R}(A - B)}$. Da alle beteiligten Operatoren stetig sind, genügt es die Gleichheit von A und $(2P - 1)B$ auf $\mathcal{R}(A - B)$ zu zeigen. Sei $y = (A - B)x$ für irgendein $x \in \mathcal{H}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(2P - 1)By &= (2P - 1)B(A - B)x = B(A - B)(2Px - x) \overset{Px\in\mathcal{N}(A-B)}{=} -B(A - B)x \\ &= (B^2 - AB)x = (A^2 - AB)x = A(A - B)x = Ay\end{aligned} \tag{0.20}$$

wie behauptet.

(iii) Zu zeigen wäre dass aus $Ax = 0$ auch $Bx = 0$ folgt, das heißt $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(B)$. Nach (ii) ist $\mathcal{N}(A) = B^{-1}(\mathcal{N}(2P - 1))$, so dass es genügt zu zeigen $\mathcal{N}(2P - 1) = \{0\}$. Doch dies ist ist eine allgemeine Eigenschaft von Orthogonalprojektionen, da aus $(2P - 1)x = 0$ folgen würde $\mathcal{R}(P)^\perp \ni x - Px = Px \in \mathcal{R}(P)$ und daher $x = 0$.

□

Aufgabe V-12

Da die $A_n \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert sind, gilt $\|A_n\| = \sup_{\|x\|=1}|\langle A_n x, x\rangle|$, so dass aufgrund der Abschätzung

$$-\|A_1\| \leq \langle A_1 x, x\rangle \leq \langle A_n x, x\rangle \leq \|B\| \tag{0.21}$$

gilt: Es existiert ein $M \geq 0$ so dass $\|A_n\| \leq M\ \forall n$, sprich die A_n, B sind gleichmäßig beschränkt. Durch geeignete Skalierung kann man also annehmen dass stets $\|A_n\| \leq 1$, $\|B\| \leq 1$ und $\|A_n - A_m\| \leq 1\ \forall n, m \in \mathbb{N}$.

- Wir zeigen die Existenz von $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x$ für beliebiges $x \in \mathcal{H}$. Beachte dass der Grenzwert $\nu(x) := \lim\limits_{n\to\infty}\langle A_n x, x\rangle$ stets existiert. Aus den Aufgabenvoraussetzungen folgt dass $(A_n - A_m) \geq 0$ für jedes $n \geq m \in \mathbb{N}$, wobei $(A_n - A_m)^\dagger = (A_n - A_m)$ und $\|A_n - A_m\| \leq 1$. Analog zu Aufgabe V-11(a), lässt sich zeigen dass $\langle (A_n - A_m)^2 x, x\rangle \leq \langle (A_n - A_m)x, x\rangle$ für alle $n \geq m$. Folglich gilt

$$\begin{aligned}\|(A_n - A_m)x\|^2 &= \langle (A_n - A_m)x, (A_n - A_m)x\rangle = \langle (A_n - A_m)^2 x, x\rangle \\ &\leq \langle (A_n - A_m)x, x\rangle = \langle A_n x, x\rangle - \langle A_m x, x\rangle \overset{n\geq m\to\infty}{\longrightarrow} \nu(x) - \nu(x) = 0,\end{aligned} \tag{0.22}$$

sprich $(A_n x)_n$ ist eine Cauchyfolge in $\mathcal{H}$. Sie besitzt daher einen Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x =: Ax$.

- Da alle A_n gleichmäßig beschränkt sind, gilt bekanntlich $\|A\| \leq \sup_n \|A_n\|$.
- Wir zeigen $A = A^\dagger$. Für $x, y \in \mathcal{H}$ gilt

$$\langle Ax, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle A_n x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, A_n y\rangle = \langle x, y\rangle \,, \tag{0.23}$$

  sprich A ist symmetrisch. Da $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, ist A selbstadjungiert.
- Für $x \in \mathcal{H}$ gilt natürlich $\langle Ax, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle A_n x, x\rangle \leq \langle Bx, x\rangle$.

$\square$

Literatur

[1] *Louca S.*, Analyse Fonctionnelle et Analyse Fourier - Manuscrit de cours
http://www.personal.uni-jena.de/~p6lost2/LibList/libraries/LIB_fsu_jena/MODULE_Analyse%20Fourier/CLASS_Artikel/UNIT_Manuscrit/Analyse%20Fourier.pdf (20.05.2011)