Höhere Analysis, II

10. Übungsserie

V-10 Seien $\mathbb{H}$ ein Hilbertraum, $A = A^*$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass dann genau eine der Aussagen gilt:

(i) $\mathbf{R}(A - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{H}}) = \mathbb{H} \quad \Longrightarrow \quad \lambda \in \boldsymbol{\varrho}(A)$

(ii) $\mathbf{R}(A - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{H}}) \subsetneq \mathbb{H}, \ \overline{\mathbf{R}(A - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{H}})} = \mathbb{H} \quad \Longrightarrow \quad \lambda \in \boldsymbol{\sigma}_{\mathsf{e}}(A) \setminus \boldsymbol{\sigma}_{\mathsf{p}}(A)$

(iii) $\mathbf{R}(A - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{H}}) = \overline{\mathbf{R}(A - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{H}})} \subsetneq \mathbb{H}, \dim(\mathbb{H} \ominus \overline{\mathbf{R}(A - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{H}})}) < \infty \implies \lambda \in \boldsymbol{\sigma}_{\mathsf{p}}(A) \setminus \boldsymbol{\sigma}_{\mathsf{e}}(A)$

(iv) $\mathbf{R}(A - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{H}}) \subsetneq \overline{\mathbf{R}(A - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{H}})} \subsetneq \mathbb{H}, \dim(\mathbb{H} \ominus \overline{\mathbf{R}(A - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{H}})}) < \infty \implies \lambda \in \boldsymbol{\sigma}_{\mathsf{p}}(A) \cap \boldsymbol{\sigma}_{\mathsf{e}}(A)$

(v) $\dim(\mathbb{H} \ominus \overline{\mathbf{R}(A - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{H}})}) = \infty \quad \Longrightarrow \quad \lambda \in \boldsymbol{\sigma}_{\mathsf{e}}(A) \setminus \boldsymbol{\sigma}_{\mathsf{p}}(A)$

Hinweis: Verwenden Sie zum Beweis von (iii) und (iv) folgende, vorher zu verifizierende Aussage für $\lambda \in \boldsymbol{\sigma}_{\mathsf{p}}(A)$: Der Operator $\widetilde{A}$, gegeben durch

$$\widetilde{A}x = Ax, \quad x \in \mathbf{D}(\widetilde{A}) = \mathbf{D}(A) \cap \overline{\mathbf{R}(A - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{H}})},$$

ist selbstadjungiert in $\widetilde{\mathbb{H}} = \overline{\mathbf{R}(A - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{H}})}$, sowie $\lambda \in \boldsymbol{\sigma}_{\mathsf{e}}(\widetilde{A}) \iff \lambda \in \boldsymbol{\sigma}_{\mathsf{e}}(A)$.

V-11 Seien $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ mit $A = A^*$, $B = B^*$, sowie $AB = BA$.

(a) Aus $A \geq 0$, $B \geq 0$ folgt $AB \geq 0$.

Hinweis: Zeigen Sie für die Operatorfolge $A_1 = \dfrac{A}{\|A\|}$, $\quad A_{n+1} = A_n - A_n^2$, $n \in \mathbb{N}$, zunächst

$0 \leq \langle A_k x, x\rangle_{\mathbb{H}} \leq \|x\|_{\mathbb{H}}^2, \quad \lim\limits_{n\to\infty} A_n x = 0, \quad Ax = \|A\| \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} A_k^2 x$, *und verwenden Sie die Vertauschbarkeit in der Partialsumme.*

(b) Es gelte zusätzlich $A^2 = B^2$, und $P : \mathbb{H} \to \mathbf{R}(P) = \mathbf{N}(A - B)$ sei der Projektor auf $\mathbf{N}(A - B)$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(i) $\forall\, C \in \mathcal{L}(\mathbb{H}),\ C(A - B) = (A - B)C : \ CP = PC$

(ii) $A = (2P - \mathrm{id}_{\mathbb{H}})B$

(iii) $\mathbf{N}(A) \subseteq \mathbf{R}(P)$

V-12 Seien $B, A_n \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$, $n \in \mathbb{N}$, $B = B^*$, $A_n = A_n^*$, $BA_n = A_nB$, sowie

$$\langle A_m x, x\rangle_{\mathbb{H}} \leq \langle A_n x, x\rangle_{\mathbb{H}} \leq \langle Bx, x\rangle_{\mathbb{H}}, \quad n \geq m.$$

Beweisen Sie, dass dann für jedes $x \in \mathbb{H}$ der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x =: Ax$ existiert, wobei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$, $A = A^*$, und $\langle Ax, x\rangle_{\mathbb{H}} \leq \langle Bx, x\rangle_{\mathbb{H}}$, $x \in \mathbb{H}$, gelten.

Hinweis: Aufgabe V-11(a)