Höhere Analysis 2
FSU Jena - SS 2011
Serie 09 - Lösungen

Stilianos Louca

June 20, 2011

Aufgabe V-05

Behauptung: $D(A^\dagger) \subseteq \{(y_k)_k \in l_2(\mathbb{N}) : y_1 = 0\}$ mit $A^\dagger \equiv 0$.

Beweis: Es sei $y = (y_k)_k \in D(A^\dagger)$, das heißt es existiere ein $y^\dagger = (y_k^\dagger)_k \in l_2(\mathbb{N})$ mit $\langle Ax, y \rangle = \langle x, y^\dagger \rangle$ für alle $x \in c_{00}(\mathbb{N})$. Dann muss gelten

$$\sum_k x_k^* \cdot y_1 = \sum_k x_k^* \cdot y_k^\dagger \quad \forall x \in c_{00}(\mathbb{N}), \tag{0.1}$$

das heißt $y_k^\dagger = y_1 \ \forall k$, was aufgrund von $y^\dagger \in l_2(\mathbb{N})$ impliziert $y_1 = 0$ und $y^\dagger = 0$.

Nehme nun A wäre abschließbar mit Abschluss $\overline{A}$, dann gelte $A^\dagger = \overline{A}^\dagger$. Da $D(A) = c_{00}(\mathbb{N})$ dicht in $l_2(\mathbb{N})$ liegt, läge auch $D(\overline{A})$ dicht in $l_2(\mathbb{N})$. Nach Aufgabe V-07 läge dann auch $D(\overline{A}^\dagger) = D(A^\dagger)$ dicht in $l_2(\mathbb{N})$. Doch $\{(y_k)_k \in l_2(\mathbb{N}) : y_1 = 0\}$ liegt nicht dicht in $l_2(\mathbb{N})$, ein Widerspruch!

□

Aufgabe V-06

Die Menge $K \subseteq L_2[0,1]$ aller stückweise konstanter Funktionen ist Teil des Definitionsgebietes $D(A)$, genauer gesagt, des Kerns $\ker(A)$. Ist nun $g \in D(A^\dagger)$, so existiert ein $g^\dagger \in L_2[0,1]$ so dass $\langle Af, g \rangle = \langle f, g^\dagger \rangle$ für alle $f \in D(A)$, insbesondere für alle $f \in K$. Treppenfunktionen sind stückweise konstant und in ihrer Gesamtheit dicht in $L_2[0,1]$, daher ist auch K dicht in $L_2[0,1]$. Da $\langle f, g^\dagger \rangle = 0$ für alle $f \in K$, muss $g^\dagger = 0$ sein. Daher muss $\langle Af, g \rangle = 0$ für alle $f \in D(A)$. Da $D(A)$ dicht in $L_2[0,1]$ liegt, muss $g = 0$ sein. Folglich ist $D(A^\dagger) = \{0\}$.

Aufgabe V-07

(a) Wir betrachten auf $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ das Skalarprodukt $\langle (x,y), (x',y') \rangle := \langle x, x' \rangle + \langle y, y' \rangle$. Dann gilt

$$\langle B(x,y), B(x',y') \rangle = \langle (-y,x), (-y',x') \rangle = \langle -y, -y' \rangle + \langle x, x' \rangle = \langle y, y' \rangle + \langle x, x' \rangle = \langle (x,y), (x',y') \rangle, \tag{0.2}$$

das heißt B ist eine Isometrie auf $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Ihre Bijektivität ist klar, so dass B tatsächlich unitär ist.

(b) Nach Abgeschlossenheit von A (bzw. von G_A in $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$) genügt es zu zeigen dass $G_A^\perp = B(G_{A^\dagger})$, da dies bedeuten würde $(B(G_{A^\dagger}))^\perp = (G_A^\perp)^\perp = \overline{G_A} = G_A$.

Es ist $(z,z') \in G_A^\perp$ genau dann wenn $(z,z') \perp (x, Ax)$ für alle $x \in D(A)$, dies genau dann wenn $\langle z, x \rangle + \langle z', Ax \rangle = 0 \ \forall x \in D(A)$ und dies genau dann wenn $\langle -z, x \rangle = \langle z', Ax \rangle \ \forall x \in D(A)$. Nach Definition des adjungierten Operators ist dies genau dann der Fall wenn $z' \in D(A^\dagger)$ und $-z = A^\dagger z'$, sprich $(z,z') = B(z', A^\dagger z) \in B(G_{A^\dagger})$.

(c) Es sei $\langle z, y \rangle = 0$ für alle $y \in D(A^\dagger)$. Für beliebiges $(x, A^\dagger x) \in G_{A^\dagger}$ gilt $\langle (z,0), (x, A^\dagger x) \rangle = \langle z, x \rangle + \langle 0, A^\dagger x \rangle = 0 + 0 = 0$, das heißt $(z,0) \in G_{A^\dagger}^\perp$. Daraus folgt auch $(0,z) = B(z,0) \in B(G_{A^\dagger}^\perp) \overset{(\clubsuit)}{=} B(G_{A^\dagger})^\perp \overset{(b)}{=} G_A$, wobei in $(\clubsuit)$ die Unitarität von B verwendet wurde.

(d) Es kann $(0,z) \in G_A$ nur dann sein wenn $z=0$. Nach Aussage (c) ist daher $D(A^\dagger)^\perp = \{0\}$. Demnach $D(A^\dagger) \overset{(\spadesuit)}{=} \overline{D(A^\dagger)} = (D(A^\dagger))^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = \mathcal{H}$, wobei in ($\spadesuit$) die Abgeschlossenheit von $A^\dagger$ (allgemeine Eigenschaft) verwendet wurde.

(e) Nach (b) und Unitarität von B gilt

$$G_A = B(G_{A^\dagger}^\perp). \tag{0.3}$$

Daher $B(G_A) = B(B(G_{A^\dagger}^\perp)) = -G_{A^\dagger}^\perp = G_{A^\dagger}^\perp$. Somit $B(G_A^\perp) = B(G_A)^\perp = G_{A^\dagger}^{\perp\perp} = \overline{G_{A^\dagger}} = G_{A^\dagger}$, das heißt

$$G_{A^\dagger} = B(G_A^\perp). \tag{0.4}$$

Nun, $A^\dagger$ ist abgeschlossen und dicht in $\mathcal{H}$ definiert. Anwendung von (0.4) auf $A^\dagger$ führt auf $G_{A^{\dagger\dagger}} = B(G_{A^\dagger}^\perp) = (B(G_{A^\dagger}))^\perp \overset{(b)}{=} G_A$, das heißt A und $A^{\dagger\dagger}$ haben gleiche Graphen. Folglich $A = A^{\dagger\dagger}$.

□

Aufgabe V-08

- Da die Projektionsräume paarweise orthogonal sind, ist $P_k P_j = 0$ falls $k \neq j$. Daher ist

$$E_\lambda^2 = \sum_{k:\lambda_k<\lambda} \underbrace{P_k^2}_{P_k} = E_\lambda, \tag{0.5}$$

  das heißt jedes E_λ ist eine Projektion. Linearkombinationen selbstadjungierter, überall definierter Operatoren sind wieder selbstadjungiert, so dass $E_\lambda = E_\lambda^\dagger\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$, sprich die E_λ sind Orthogonalprojektionen.

- Es ist klar dass für alle $\lambda > \lambda_n$ gilt $E_\lambda = \mathrm{Id}$, so dass $E_\lambda x \overset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} x$ für jedes $x \in \mathcal{H}$. Ähnlich ist $E_\lambda = 0$ falls $\lambda < \lambda_1$, so dass $E_\lambda x \overset{\lambda\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ für jedes $x \in \mathcal{H}$.

- Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Es gibt stets ein $\varepsilon > 0$ so dass $[\lambda-\varepsilon,\lambda) \cap \{\lambda_k\}_k = \emptyset$. Folglich ist $E_\mu = E_\lambda$ für alle $\mu \in [\lambda-\varepsilon,\lambda]$, sprich $E_\mu x \overset{\mu\to\lambda^-}{\longrightarrow} E_\lambda x$ für jedes $x \in \mathcal{H}$.

- Nun seien $\mu < \lambda \in \mathbb{R}$. Beachte dass die E_λ alle paarweise kommutieren da alle P_k paarweise kommutieren, sprich $E_\mu E_\lambda = E_\lambda E_\mu$. Da $P_k P_j = 0$ für $k \neq j$, gilt

$$E_\lambda E_\mu = \underbrace{\sum_{k:\lambda_k<\mu} P_k \sum_{j:\lambda_j<\mu} P_j}_{E_\mu^2 = E_\mu} + \underbrace{\sum_{k:\lambda_k<\mu} P_k \sum_{j:\mu\le\lambda_j<\lambda} P_j}_{0} = E_\mu = E_{\min\{\lambda,\mu\}}. \tag{0.6}$$

Folglich ist $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ tatsächlich eine Spektralschar auf $\mathcal{H}$.

□

Aufgabe V-09

Für $\zeta = \{\zeta_0 < \zeta_1 < .. < \zeta_r\} \subseteq \mathbb{R}$ und $\lambda = \{\lambda_0 < .. < \lambda_{r-1}\} \subseteq \mathbb{R}$ schreiben wir $\lambda \Subset \zeta$ falls $\lambda_k \in [\zeta_k, \zeta_{k+1})$ für jedes $k \in \{0,..,r-1\}$. Für Funktion $f: X \to Y$ zwischen zwei metrischen Räumen X, Y bezeichne $\omega_f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ das Stetigkeitsmodul[1] von f. Wir schreiben

$$\sum_\zeta \varphi(\zeta)\ dh := \sum_{k=0}^{r-1} \varphi(\zeta_k) \cdot [h(\zeta_{k+1}) - h(\zeta_k)] \tag{0.7}$$

bzw.

$$\sum_\zeta \varphi(\lambda)\ dh := \sum_{k=0}^{r-1} \varphi(\lambda_k) \cdot [h(\zeta_{k+1}) - h(\zeta_k)]\,. \tag{0.8}$$

Wir zeigen die Behauptung in mehreren Etappen.

[1] Definiert durch $\omega_f(\varepsilon) := \sup\{d(x,\widetilde{x}) : x,\widetilde{x} \in X,\ d(x,\widetilde{x}) \le \varepsilon\}$ für $\varepsilon \ge 0$. Beachte dass $\omega_f(\varepsilon) \overset{\varepsilon\to0^+}{\longrightarrow} 0$ genau dann wenn f gleichmäßig stetig ist.

- Sei $[a,b)$ ein Stetigkeitsintervall von φ. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\zeta^{(n)} := \{a = \zeta_0^{(n)} < \zeta_1^{(n)} < .. < \zeta_{2^n}^{(n)} = b\}$ eine Zerlegung von $[a,b)$ definiert durch

$$\zeta_k^{(n)} := a + (b-a) \cdot 2^{-n} \cdot k \quad , \quad k = 0,..,2^n. \tag{0.9}$$

Beachte dass $\mathrm{diam}(\zeta^{(n)}) = 2^{-n}$. Wir zeigen dass die Folge

$$S_n := \sum_{\zeta^{(n)}} \varphi(\zeta^{(n)})\ dh = \sum_{k=0}^{2^n-1} \varphi(\zeta_k^{(n)}) \cdot \left[h(\zeta_{k+1}^{(n)}) - h(\zeta_k^{(n)})\right] \tag{0.10}$$

einen Grenzwert in $\mathbb{C}$ besitzt, das heißt eine Cauchyfolge ist. Wir nennen $\zeta_{k,j}^{n,m} := \zeta_{2^m k+j}^{n+m}$ den j-ten Punkt in $\zeta^{(n+m)}$ im k-ten Intervall definiert durch die Zerlegung $\zeta^{(n)}$ ($k \in \{0,..,2^n-1\}, j \in \{0,..,2^m\}$). Beachte dass $\zeta_{k,2^m}^{n,m} = \zeta_{k+1,0}^{n,m} = \zeta_k^n$. Dann lässt sich für $n,m \in \mathbb{N}$ schreiben

$$\begin{aligned}
S_{n+m} &= \sum_{k=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^m} \varphi(\zeta_{k,j}^{n,m}) \cdot \left[h(\zeta_{k,j+1}^{n,m}) - h(\zeta_{k,j}^{n,m})\right] \\
&= \sum_{k=0}^{2^n-1} \underbrace{\varphi(\zeta_{k,0}^{n,m})}_{\varphi(\zeta_k^n)} \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{2^m-1} \left[h(\zeta_{k,j+1}^{n,m}) - h(\zeta_{k,j}^{n,m})\right]}_{\substack{h(\zeta_{k,2^m}^{n,m}) - h(\zeta_{k,0}^{n,m}) \\ = h(\zeta_{k+1}^n) - h(\zeta_k^n)}} + \sum_{k=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^m-1} \left[\varphi(\zeta_{k,j}^{n,m}) - \varphi(\zeta_{k,0}^{n,m})\right] \cdot \left[h(\zeta_{k,j+1}^{n,m}) - h(\zeta_{k,j}^{n,m})\right] \\
&= S_n + \sum_{k=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^m-1} \left[\varphi(\zeta_{k,j}^{n,m}) - \varphi(\zeta_{k,0}^{n,m})\right] \cdot \left[h(\zeta_{k,j+1}^{n,m}) - h(\zeta_{k,j}^{n,m})\right].
\end{aligned} \tag{0.11}$$

Folglich kann man abschätzen

$$\begin{aligned}
|S_{m+n} - S_n| &\le \sum_{k=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^m-1} \underbrace{\left|\varphi(\zeta_{k,j}^{n,m}) - \varphi(\zeta_{k,0}^{n,m})\right|}_{\le \omega_\varphi(2^{-n})} \cdot \left[h(\zeta_{k,j+1}^{n,m}) - h(\zeta_{k,j}^{n,m})\right] \\
&\le \omega_{\varphi|_{[a,b)}}(2^{-n}) \cdot [h(b) - h(a)] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned} \tag{0.12}$$

wobei im Grenzübergang die gleichmäßige Stetigkeit von φ auf $[a,b)$ verwendet wurde. Letztere ist gegeben da $\varphi\big|_{[a,b)}$ stetig auf das kompakte Intervall $[a,b]$ fortgesetzt werden kann (da $\lim_{x\to b^-} \varphi(x)$ nach Voraussetzung an φ existiert). Die Folge $(S_n)_n$ ist demnach tatsächlich Cauchy. Wir nennen $\int_{[a,b)} \varphi\ dh$ diesen Grenzwert.

Bemerkung: Obige Rechnung lässt sich leicht verallgemeinern um zu zeigen dass: Sind $\zeta, \widetilde{\zeta}$ zwei Zerlegungen von $[a,b)$ mit $\zeta \subseteq \widetilde{\zeta}$, so folgt

$$\left|\sum_\zeta \varphi(\zeta)\ dh - \sum_{\widetilde{\zeta}} \varphi(\widetilde{\zeta})\ dh\right| \le \omega_\varphi(\mathrm{diam}(\zeta)) \cdot [h(b) - h(a)]. \tag{0.13}$$

- Sei $[a,b)$ ein Stetigkeitsintervall von φ. Wir zeigen dass der Grenzwert

$$\lim_{\mathrm{diam}(\zeta)\to 0} \underbrace{\sum_{k=0}^{|\zeta|-2} \varphi(\zeta_k) \cdot [h(\zeta_{k+1}) - h(\zeta_k)]}_{=: \sum_\zeta \varphi(\zeta)\ dh} \tag{0.14}$$

in $\mathbb{C}$ existiert und gleich $\int_{[a,b)} \varphi\, dh$ ist, wobei der Grenzwert über Zerlegungen $\zeta = \{a = \zeta_0 < \zeta_1 < .. < \zeta_n = b\}$ von $[a,b)$ genommen wird. Dazu genügt es zu zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jede Zerlegung ζ von $[a,b)$ mit $\mathrm{diam}(\zeta) \le \delta$ gilt

$$\left|\sum_\zeta \varphi(\zeta)\ dh - \int_{[a,b)} \varphi\ dh\right| \le 5\varepsilon. \tag{0.15}$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $\delta > 0$ so dass $\omega_{\varphi|_{[a,b)}}(2\delta) \cdot [h(b) - h(a)] \leq \varepsilon$. Sei nun $\zeta = \{a = \zeta_0 < .. < \zeta_r = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b)$ mit $\operatorname{diam}(\zeta) \leq \delta$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ so dass $2^{-n} \leq \delta$ und

$$\max_{0 \leq j \leq r} \left| h(\zeta_r) - h\left[\max_{k:\zeta_k^{(n)} \leq \zeta_r} \zeta_k^{(n)}\right]\right| \cdot \left\|\varphi|_{[a,b)}\right\|_\infty \cdot r \leq \varepsilon, \tag{0.16}$$

wobei die $\zeta^{(n)}$ wie in (0.9) definiert seien. Beachte dass (0.16) stets möglich ist da h linksseitig stetig und beschränkt auf $[a, b)$ ist. Beachte dass nach (0.12)

$$\left|\sum_{\zeta^{(n)}} \varphi(\zeta^{(n)})\ dh - \int_{[a,b)} \varphi\ dh\right| \leq \underbrace{\omega_{\varphi|_{[a,b)}}(2^{-n})}_{\leq \omega_{\varphi|_{[a,b)}}(\delta)} \cdot [h(b) - h(a)] \leq \varepsilon. \tag{0.17}$$

Für jedes $j \in \{0, .., r\}$ sei $k_j := \max\{k : \zeta_k^{(n)} \leq \zeta_j\}$ (Approximation von ζ durch $\zeta^{(n)}$ von links). Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_\zeta \varphi(\zeta)\ dh &= \sum_{j=0}^{r-1} \varphi(\zeta_j) \cdot [h(\zeta_{j+1}) - h(\zeta_j)] \\
&= \sum_{j=0}^{r-1} \varphi(\zeta_{k_j}^{(n)}) \cdot [h(\zeta_{j+1}) - h(\zeta_j)] + \sum_{j=0}^{r-1} \left[\varphi(\zeta_j) - \varphi(\zeta_{k_j}^{(n)})\right] \cdot [h(\zeta_{j+1}) - h(\zeta_j)] \\
&= \sum_{j=0}^{r-1} \varphi(\zeta_{k_j}^{(n)}) \cdot \left[h(\zeta_{k_{j+1}}^{(n)}) - h(\zeta_{k_j}^{(n)})\right] + \sum_{j=0}^{r} \varphi(\zeta_{k_j}^{(n)}) \cdot \left[h(\zeta_{j+1}) - h(\zeta_{k_{j+1}}^{(n)})\right] \\
&\quad - \sum_{j=0}^{r} \varphi(\zeta_{k_j}^{(n)}) \cdot \left[h(\zeta_j) - h(\zeta_{k_j}^{(n)})\right] + \sum_{j=0}^{r-1} \left[\varphi(\zeta_j) - \varphi(\zeta_{k_j}^{(n)})\right] \cdot [h(\zeta_{j+1}) - h(\zeta_j)]\,.
\end{aligned} \tag{0.18}$$

Betrachtet man nun die Zerlegung $\widetilde{\zeta} := (\zeta_{k_j}^{(n)})_{j=0}^r$ von $[a, b)$, so ist diese als Menge enthalten in $\zeta^{(n)}$. Nach Konstruktion ist außerdem $\operatorname{diam}(\widetilde{\zeta}) \leq 2\delta$. Folglich gilt

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_\zeta \varphi(\zeta)\ dh - \sum_{\zeta^{(n)}} \varphi(\zeta^{(n)})\ dh\right| \leq \left|\sum_\zeta \varphi(\zeta)\ dh - \sum_{\widetilde{\zeta}} \varphi(\widetilde{\zeta})\ dh\right| + \left|\sum_{\widetilde{\zeta}} \varphi(\widetilde{\zeta})\ dh - \sum_{\zeta^{(n)}} \varphi(\zeta^{(n)})\ dh\right| \\
&\overset{(0.18)}{\leq} \underbrace{\sum_{j=0}^{r} \underbrace{\varphi(\zeta_{k_j}^{(n)})}_{\leq \|\varphi|_{[a,b)}\|_\infty} \cdot \left|h(\zeta_{j+1}) - h(\zeta_{k_{j+1}}^{(n)})\right|}_{\leq \varepsilon \text{ nach } (0.16)} + \underbrace{\sum_{j=0}^{r} \underbrace{\varphi(\zeta_{k_j}^{(n)})}_{\leq \|\varphi|_{[a,b)}\|_\infty} \cdot \left|h(\zeta_j) - h(\zeta_{k_j}^{(n)})\right|}_{\leq \varepsilon \text{ nach } (0.16)} \\
&+ \underbrace{\sum_{j=0}^{r-1} \underbrace{\left|\varphi(\zeta_j) - \varphi(\zeta_{k_j}^{(n)})\right|}_{\leq \omega_{\varphi|_{[a,b)}}(\delta)} \cdot [h(\zeta_{j+1}) - h(\zeta_j)]}_{\leq \omega_{\varphi|_{[a,b)}}(\delta) \cdot [h(b)-h(a)] \leq \varepsilon} + \underbrace{\left|\sum_{\widetilde{\zeta}} \varphi(\widetilde{\zeta})\ dh - \sum_{\zeta^{(n)}} \varphi(\zeta^{(n)})\ dh\right|}_{\substack{\leq \omega_{\varphi|_{[a,b)}}(2\delta) \cdot [h(b)-h(a)] \leq \varepsilon \\ \text{nach } (0.13)}} \\
&\leq 4\varepsilon
\end{aligned} \tag{0.19}$$

Aus (0.17) und (0.19) folgt schließlich (0.15) wie behauptet.

- Sei $[a, b)$ ein Stetigkeitsintervall von φ. Wir zeigen dass

$$\lim_{\substack{\operatorname{diam}(\zeta) \to 0 \\ \lambda \Subset \zeta}} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\lambda_k) \cdot [h(\zeta_{k+1}) - h(\zeta_k)]}_{=: \sum_\zeta \varphi(\lambda)\ dh} = \int_{[a,b)} \varphi\ dh. \tag{0.20}$$

Tatsächlich lässt sich für beliebige Zerlegung ζ von $[a,b)$ und $\lambda \Subset \zeta$ abschätzen

$$\begin{aligned} \left| \sum_\zeta \varphi(\lambda)\ dh - \sum_\zeta \varphi(\zeta)\ dh \right| &\leq \sum_{k=0}^{|\zeta|-2} \underbrace{|\varphi(\lambda_k) - \varphi(\zeta_k)|}_{\leq \omega_\varphi(\operatorname{diam}(\zeta))} \cdot [h(\zeta_{k+1}) - h(\zeta_k)] \\ &\leq \omega_{\varphi|_{[a,b)}}(\operatorname{diam}(\zeta)) \cdot [h(b) - h(a)] \overset{\operatorname{diam}(\zeta)\to 0}{\longrightarrow} 0, \end{aligned} \tag{0.21}$$

wobei im Grenzübergang die gleichmäßige Stetigkeit von φ auf $[a,b)$ verwendet wurde. Hieraus folgt dass

$$\lim_{\substack{\operatorname{diam}(\zeta)\to 0 \\ \lambda \Subset \zeta}} \sum_\zeta \varphi(\lambda)\ dh = \lim_{\operatorname{diam}(\zeta)\to 0} \sum_\zeta \varphi(\zeta)\ dh = \int_{[a,b)} \varphi\ dh \tag{0.22}$$

wie behauptet.

- Sei (a,b) ein Stetigkeitsintervall von φ. Wir zeigen dass der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{[a+\varepsilon,b)} \varphi\ dh \tag{0.23}$$

in $\mathbb{R}$ existiert. Durch Zerlegung von φ in positiven und negativen Teil φ^+ und φ^- genügt es den Fall $\varphi \geq 0$ zu betrachten. Dann ist offensichtlich $\int_{[a+\varepsilon,b)} \varphi\ dh$ wachsend für kleiner werdendes ε, das heißt der Grenzwert (0.23) existiert in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Es ist außerdem klar dass

$$\sum_\zeta \varphi(\zeta)\ dh \leq \left\| \varphi\ |_{[a+\varepsilon,b)} \right\|_\infty \cdot [h(b) - h(a+\varepsilon)] \leq \left\| \varphi\ |_{(a,b)} \right\|_\infty \cdot [h(b) - h(a)] \tag{0.24}$$

für jede Zerlegung ζ von $[a+\varepsilon, b)$. Beachte dass φ auf (a,b) beschränkt ist, da stetig fortsetzbar auf das kompakte Intervall $[a,b]$. Daher sind die Integrale $\int_{[a+\varepsilon,b)} \varphi\ dh$ gleichmäßig für alle $\varepsilon > 0$ beschränkt, so dass der Grenzwert (0.23) sogar endlich ist.

□