Höhere Analysis, II

9. Übungsserie

V-5 Seien $\mathbf{D}(A) = \{x \in \ell_2(\mathbb{N}) : \ x \in c_{00}(\mathbb{N})\} \subset \ell_2(\mathbb{N})$, und

$$A : \mathbf{D}(A) \to \ell_2(\mathbb{N}) \quad \text{mit} \quad A : (x_j)_j \mapsto Ax = ((Ax)_j)_j = \begin{cases} (Ax)_1 = \sum\limits_k a_k, & j = 1, \\ 0, & j \geq 2. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass A nicht abschließbar ist.

V-6 Sei $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ gegeben mit

$$A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}, \quad \mathbf{D}(A) = \left\{ f \in L_2[0,1] : \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \text{ existiert f.ü.}, \ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \in L_2[0,1] \right\}.$$

Zeigen Sie, dass dann $\mathbf{D}(A^*) = \{0\}$ gilt.

Hinweis: Approximation durch stückweise konstante Funktionen

V-7 Seien $A : \mathbf{D}(A) \to \mathbb{H}$ gegeben mit dichtem Teilraum $\mathbf{D}(A) \subseteq \mathbb{H}$, A abgeschlossen, sowie $B : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ mit $B : (x, y) \mapsto (-y, x)$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) B ist ein unitärer Operator bezüglich des kanonischen Skalarproduktes in $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$.

(b) Für den Graphen $\mathsf{G}_A = \{(x, Ax) : \ x \in \mathbf{D}(A)\}$ von A gilt

$$\mathsf{G}_A = \left(B\left(\mathsf{G}_{A^*}\right)\right)^{\perp}.$$

(c) Für $z \in \mathbf{D}(A^*)^{\perp}$ gelten $(z, 0) \in \mathsf{G}_{A^*}^{\perp}$, sowie $(0, z) \in \mathsf{G}_A$.

(d) $\mathbf{D}(A^*)$ ist dicht in $\mathbb{H}$.

(e) $A = (A^*)^*$.

V-8 Seien reelle Zahlen $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$, paarweise orthogonale Teilräume $\mathbb{H}_1, \ldots, \mathbb{H}_n \subset \mathbb{H}$ gegeben, sowie $P_k : \mathbb{H} \to \mathbb{H}_k$ die Projektionen auf diese Teilräume, $k = 1, \ldots, n$. Zusätzlich möge gelten,

$$\mathrm{id}_{\mathbb{H}} = \sum_{k=1}^{n} P_k \quad \text{in} \quad \mathcal{L}(\mathbb{H}).$$

Zeigen Sie, dass durch $E_\lambda = \sum\limits_{k:\lambda_k < \lambda} P_k$ eine Spektralschar definiert wird.

V-9 Seien $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine zulässige Funktion, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende, linksseitig stetige Funktion. Für ein Stetigkeitsintervall (a, b) von φ und $\varepsilon \in (0, b-a)$ sei $\mathfrak{Z}_\varepsilon$ eine Zerlegung des Intervalls $[a+\varepsilon, b)$ mit $a + \varepsilon = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$. Dann existieren

$$\lim_{d(\mathfrak{Z}_\varepsilon) \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\lambda_k) \left(h(a_{k+1}) - h(a_k)\right) = \int\limits_{[a+\varepsilon, b)} \varphi(\lambda) \, \mathrm{d}h(\lambda),$$

unabhängig von der Auswahl der Punkte $\lambda_k \in [a_k, a_{k+1})$, sowie

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{[a+\varepsilon, b)} \varphi(\lambda) \, \mathrm{d}h(\lambda) = \int\limits_{(a,b)} \varphi(\lambda) \, \mathrm{d}h(\lambda).$$