Höhere Analysis 2
FSU Jena - SS 2011
Serie 08 - Lösungen

Stilianos Louca

June 20, 2011

Aufgabe V-01

Die Gültigkeit der Aussagen ist eine Frage der *Kompatibilität* der Definitionsgebiete $D(A_i)$ der Operatoren (abgesehen von der schlechten Schreibweise $A_i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ in der Aufgabenstellung). Dort wo beide Seiten gemeinsam definiert sind, stimmen sie definitionsgemäß überein.

(a) Es ist $x \in D(A_2A_3)$ genau dann wenn $x \in D(A_3)$ und $A_3x \in D(A_2)$. Daher ist $x \in D(A_1(A_2A_3))$ genau dann wenn $x \in D(A_3), A_3x \in D(A_2)$ und $A_2A_3x \in D(A_1)$.

Anderseits ist $y \in D(A_1A_2)$ genau dann wenn $y \in D(A_2)$ und $A_2y \in D(A_1)$. Daher ist $x \in D((A_1A_2)A_3)$ genau dann wenn $x \in D(A_3), A_3x \in D(A_2)$ und $A_2A_3x \in D(A_1)$.

Somit sind $A_1(A_2A_3)$ und $(A_1A_2)A_3$ gleich.

(b) Es ist $x \in D((A_1 + A_2)A_3)$ genau dann wenn $x \in D(A_3)$ und $A_3x \in D(A_1) \cap D(A_2)$.

Anderseits ist $x \in D(A_1A_3 + A_2A_3)$ genau dann wenn $x \in D(A_1A_3) \cap D(A_2A_3)$, und dies genau dann wenn $x \in D(A_3)$ und $A_3x \in D(A_1) \cap D(A_2)$.

Somit sind $(A_1 + A_2)A_3 = A_1A_3 + A_2A_3$.

(c) Es ist $x \in D(A_1A_2 + A_1A_3)$ genau dann wenn $x \in D(A_1A_2) \cap D(A_1A_3)$, und dies genau dann wenn $x \in D(A_2) \cap D(A_3)$ und $A_2x, A_3x \in D(A_1)$.

Anderseits ist $x \in D(A_1(A_2 + A_3))$ genau dann wenn $x \in D(A_2 + A_3)$ und $(A_2 + A_3)x \in D(A_1)$, und dies genau dann wenn $x \in D(A_2) \cap D(A_3)$ und $A_2x + A_3x \in D(A_1)$. Da $D(A_1)$ algebraisch abgeschlossen ist impliziert $x \in D(A_1A_2 + A_1A_3)$ auf jeden Fall $x \in D(A_1(A_2 + A_3))$, das heißt $A_1A_2 + A_1A_3 \subseteq A_1(A_2 + A_3)$.

Gleichheit gilt z.B. wenn $A_2x + A_3x \in D(A_1)$ impliziert $A_2x, A_3x \in D(A_1)$. Dies ist z.B. der Fall wenn $\mathrm{image}(A_2) \subseteq D(A_1)$ oder auch wenn $\mathrm{image}(A_3) \subseteq D(A_1)$.

Aufgabe V-02

Zu $y \in \mathcal{H}$ sei $y^\dagger \in \mathcal{H}$ der (eindeutige) Vektor der erfüllt $\langle Ax, y\rangle = \left\langle x, y^\dagger \right\rangle \ \forall x \in D(A)$, insofern existent. Dann ist $D(A^\dagger) := \left\{y \in \mathcal{H} : \exists y^\dagger\right\}$ und $A^\dagger y := y^\dagger$.

(a) Offensichtlich existiert $0^\dagger$, sprich $0 \in D(A^\dagger)$. Seien nun $y, z \in \mathcal{H}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ so dass $y^\dagger, z^\dagger$ existieren, dann existiert auch $(\lambda y + z)^\dagger$ und nimmt die Gestalt $(\lambda y + z)^\dagger = \lambda y^\dagger + z^\dagger$ an, das heißt $D(A^\dagger)$ ist algebraisch abgeschlossen und $A^\dagger : y \mapsto y^\dagger$ linear auf $D(A^\dagger)$.

Sind nun $(y_n)_n \subseteq D(A^\dagger)$ und $y, z \in \mathcal{H}$ so dass $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y,\ A^\dagger y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$. Dann gilt für jedes $x \in D(A)$

$$\langle Ax, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Ax, y_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle x, A^\dagger y_n\right\rangle = \langle x, z\rangle\,, \tag{0.1}$$

sprich $y^\dagger$ existiert mit $y^\dagger = z$. Der Operator $A^\dagger : D(A^\dagger) \to \mathcal{H}$ ist also abgeschlossen.

(b) Sei B eine Erweiterung von A. Erfüllt $y^\dagger$ für irgendein $y \in \mathcal{H}$ die Bedingung $\langle Bx, y\rangle = \left\langle x, y^\dagger\right\rangle \ \forall x \in D(B)$, so erfüllt es diese insbesondere für $x \in D(A)$, sprich $y \in D(A^\dagger)$ mit $A^\dagger y = B^\dagger y$. Daher ist $B^\dagger \subseteq A^\dagger$.

(c) Nach (ii) ist bereits bekannt dass $\overline{A}^\dagger \subseteq A^\dagger$. Seien nun $y, y^\dagger \in \mathcal{H}$ so dass $\langle Ax, y\rangle = \langle x, y^\dagger\rangle$ $\forall x \in D(A)$. Zu beliebigem $x \in D(\overline{A})$ wähle nun $(x_n)_n \subseteq D(A)$ so dass $\|x_n - x\| + \|Ax_n - \overline{A}x\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Dann gilt

$$\langle \overline{A}x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Ax_n, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y^\dagger\rangle = \langle x, y^\dagger\rangle , \tag{0.2}$$

sprich $y \in D(\overline{A}^\dagger)$ und $\overline{A}^\dagger y = A^\dagger y$. Dies zeigt dass $A^\dagger \subseteq \overline{A}^\dagger$.

(d) Per Konvention setzen wir für zwei lineare Operatoren A, B stets $D(A + B) := D(A) \cap D(B)$.

Wir zeigen nun allgemein: Sind A, B lineare Operatoren auf jeweils $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ (dicht) und $D(B) \supseteq D(A)$ so dass zusätzlich $D(B^\dagger) = \mathcal{H}$, so gilt $(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$. Es sei $y \in D((A + B)^\dagger)$, das heißt es existiere $y^\dagger \in \mathcal{H}$ so dass $\langle (A + B)x, y\rangle = \langle x, y^\dagger\rangle$ für jedes $x \in D(A + B) = D(A)$. Bemerke dass $y \in D(B^\dagger)$, sprich ein $\widetilde{y} \in \mathcal{H}$ existiert so dass $\langle Bx, y\rangle = \langle x, \widetilde{y}\rangle$ $\forall x \in D(B)$, insbesondere auch für $x \in D(A)$. Also

$$\langle Ax, y\rangle = \langle (A + B)x, y\rangle - \langle Bx, y\rangle = \langle x, y^\dagger\rangle - \langle x, \widetilde{y}\rangle = \langle x, y^\dagger - \widetilde{y}\rangle \ \forall x \in D(A), \tag{0.3}$$

sprich $y \in D(A^\dagger)$ und $A^\dagger y = y^\dagger - \widetilde{y} = (A + B)^\dagger y - B^\dagger y$. Demnach ist

$$D((A + B)^\dagger) \subseteq D(A^\dagger) \cap D(B^\dagger) =: D(A^\dagger + B^\dagger) \tag{0.4}$$

und $(A+B)^\dagger$ stimmt mit $A^\dagger + B^\dagger$ auf $D((A+B)^\dagger)$ überein. Sei nun umgekehrt $y \in D(A^\dagger + B^\dagger) = D(A^\dagger) \cap D(B^\dagger)$, dann existieren $A^\dagger y$ und $B^\dagger y$ mit $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^\dagger y\rangle$ $\forall x \in D(A)$ und $\langle Bx, y\rangle = \langle x, B^\dagger y\rangle$ $\forall x \in D(B)$. Dies impliziert

$$\langle (A + B)x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle + \langle Bx, y\rangle = \langle x, A^\dagger y\rangle + \langle x, B^\dagger y\rangle = \langle x, A^\dagger y + B^\dagger y\rangle \tag{0.5}$$

für alle $x \in D(A) \cap D(B) = D(A + B)$. Daher ist auch $y \in D((A + B)^\dagger)$ mit $(A + B)^\dagger y = (A^\dagger + B^\dagger)y$. Folglich $A^\dagger + B^\dagger \subseteq (A + B)^\dagger$.

Es ist klar dass $(\lambda\,\mathrm{Id})^\dagger = \overline{\lambda}\,\mathrm{Id}$ und $D((\lambda\,\mathrm{Id})^\dagger) = \mathcal{H}$ für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$. Daher ist die Aussage

$$(A + \lambda\,\mathrm{Id})^\dagger = A^\dagger + \overline{\lambda}\,\mathrm{Id} \tag{0.6}$$

lediglich ein Spezialfall obiger Überlegungen (setze $B := \lambda\,\mathrm{Id}$).

Alternative: Es ist $y \in D(A^\dagger)$ genau dann wenn $\langle Ax, x\rangle = \langle x, A^\dagger y\rangle$ für alle $x \in D(A) = D(A - \lambda)$, dies genau dann wenn $\langle (A - \lambda)x, y\rangle = \langle x, (A^\dagger - \overline{\lambda})y\rangle$ für alle $x \in D(A - \lambda)$ und dies genau dann wenn $y \in D((A - \lambda)^\dagger)$ mit $(A - \lambda)^\dagger y = (A^\dagger - \overline{\lambda})y$.

□

Aufgabe V-03

(a) Die Unbeschränktheit von A ist klar denn $\|Ae_k\| = k$ (mit e_k als k-ter Standardbasisvektor in $l_2(\mathbb{N})$) obwohl $\|e_k\| = 1$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Die Folge von Vektoren $x^{(n)} := \left(1, \frac{1}{2^2}, .., \frac{1}{n^2}, 0, ..\right) \in D(A)$ konvergiert in $l_2(\mathbb{N})$ mit $n \to \infty$ gegen $x := \left(\frac{1}{k^2}\right)_k$. Deren Bilder $Ax^{(n)} = \left(1, \frac{1}{2}, .., \frac{1}{n}, 0, ..\right)$ konvergieren in $l_2(\mathbb{N})$ gegen $y := \left(\frac{1}{k}\right)_k$. Doch nicht-desto trotz, ist $x \notin D(A)$ und (x, y) nicht im Graph von A.

(b) Definieren

$$D(B) := \{x \in l_2(\mathbb{N}) : (kx_k)_k \in l_2(\mathbb{N})\} \tag{0.7}$$

und $Bx := (kx_k)_k$ für $x \in D(B)$. Dann ist offensichtlich $D(B)$ ein linearer Raum, $D(A) \subsetneq D(B)$ und $B\big|_{D(A)} = D(A)$. Der Operator $B : D(B) \to l_2(\mathbb{N})$ ist also eine echte lineare Erweiterung von A.

(c) **Ja**, nach Hilfsaussage 01 (siehe unten).

(d) B erwies sich bereits in (b) als lineare Erweiterung von A. Bemerke dass B die Inversion des injektiven, linearen Operators

$$C : l_2(\mathbb{N}) \to l_2(\mathbb{N}) \quad , \quad C(x_k)_k \mapsto \left(\tfrac{x_k}{k}\right)_k \tag{0.8}$$

ist, wobei $C(l_2(\mathbb{N}))$ genau dem Definitionsgebiet $D(B)$ entspricht. Da C beschränkt ist, ist er insbesondere abgeschlossen. Nach Hilfsaussage 02 (siehe unten) ist daher auch $B : D(B) \to l_2(\mathbb{N})$ abgeschlossen.

Hilfsaussage 01

Seien X, Y $\mathbb{K}$-linearere Räume und $A : D(A) \subseteq X \to Y$ ein linearer Operator. Dann kann A linear auf ganz X erweitert werden.

Beweis: Betrachten die Erweiterungsrelation "$\subseteq$" für lineare Operatoren als Halbordnung auf der (nicht-leeren) Menge $\mathcal{E}(A)$ aller linearen Erweiterungen von A. Dann ist $(\mathcal{E}(A), \subseteq)$ induktiv nach oben geordnet, da für jede Kette $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{E}(A)$ der Operator $K : D(K) := \bigcup_{B \in \mathcal{K}} D(B) \to Y$ definiert durch $Kx := Bx$ (mit $x \in D(B)$) eine obere Schranke ist. Nach Zorn's Lemma besitzt $\mathcal{E}(A)$ ein maximales Element $\widetilde{A}$.

Nehme nun an $\widetilde{A}$ sei nicht auf ganz X definiert, so gäbe es ein $x \in X \setminus D(\widetilde{A})$. Setze $D(\hat{A}) := D(\widetilde{A}) \oplus \operatorname{span}\{x\}$ und $\hat{A}(u + \lambda x) := \widetilde{A}u$ für jedes $u \in D(\widetilde{A})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann ist $\hat{A} \supsetneq \widetilde{A}$, ein Widerspruch zur Maximalität von $\widetilde{A}$!

Alternative: Wähle irgendein Komplement V von $D(A)$ in X, das heißt $X = V \oplus D(A)$. Setze $\widetilde{A}(v + x) := A(x)$ für $v \in V$ und $x \in D(A)$. Dann ist $\widetilde{A}$ eine lineare Erweiterung von A auf X.

□

Hilfsaussage 02

Seien X, Y normierte Räume und $A : D(A) \subseteq X \to Y$ ein abgeschlossener, injektiver, linearer Operator. Dann ist $A^{-1} : D(A^{-1}) := A(D(A)) \subseteq Y \to X$ ebenfalls abgeschlossen.

Beweis: Seien $(y_n)_n \subseteq D(A^{-1})$ und $y \in Y,\ x \in X$ so dass $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$ und $A^{-1}y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Seien $(x_n)_n \subseteq D(A)$ so dass $y_n = Ax_n$, so gilt $Ax_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$ und $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Da A abgeschlossen ist, sind $x \in D(A)$ und $y = Ax$, sprich $y \in D(A^{-1})$ und $A^{-1}y = x$.

□

Aufgabe V-04

- Es sei $y \in D(B^\dagger A^\dagger)$, das heißt $y \in D(A^\dagger)$ mit $A^\dagger y \in D(B^\dagger)$. Dann existieren $y_a := A^\dagger y, y_b := B^\dagger y_a \in \mathcal{H}$ so dass $\langle Ax, y\rangle = \langle x, y_a\rangle \ \forall x \in D(A)$ und $\langle Bx, y_a\rangle = \langle x, y_b\rangle \ \forall x \in D(B)$. Is nun $x \in D(AB)$, das heißt $x \in D(B)$ und $Bx \in D(A)$, so muss nach obigem gelten

$$\langle ABx, y\rangle = \langle Bx, y_a\rangle = \langle x, y_b\rangle\,, \tag{0.9}$$

  sprich $y \in D((AB)^\dagger)$ mit $(AB)^\dagger y = y_b = B^\dagger A^\dagger y$. Mit anderen Worten $B^\dagger A^\dagger \subseteq (AB)^\dagger$.

- Sei nun $D(A) = \mathcal{H}$. Sei $y \in D((AB)^\dagger)$, das heißt es existiere ein $y^\dagger \in \mathcal{H}$ mit

$$\langle ABx, y\rangle = \left\langle x, y^\dagger\right\rangle \ \forall x \in D(AB) = D(B). \tag{0.10}$$

  Zu zeigen wäre dass $y \in D(B^\dagger A^\dagger)$, das heißt $y \in D(A^\dagger)$ und $A^\dagger y \in D(B^\dagger)$. Da A beschränkt und auf ganz $\mathcal{H}$ definiert ist, ist nach Hilfsaussage 03 (siehe unten) sowieso $D(A^\dagger) = \mathcal{H}$. Für jedes $x \in D(B)$ gilt nun $\left\langle Bx, A^\dagger y\right\rangle \overset{Bx\in D(A)}{=} \langle ABx, y\rangle \overset{(0.10)}{=} \left\langle x, y^\dagger\right\rangle$, das heißt $A^\dagger y \in D(B^\dagger)$ mit $B^\dagger A^\dagger = y^\dagger$.

□

Hilfsaussage 03

Ist $\mathcal{H}$ ein $\mathbb{K}$-Hilbertraum und $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, so ist $D(A^\dagger) = \mathcal{H}$.

Beweis: Sei $y \in \mathcal{H}$ gegeben. Der lineare Operator $\mathcal{H} \to \mathbb{K}$ definiert durch $x \mapsto \langle Ax, y\rangle$ ist beschränkt, so dass nach Fréchet-Riesz ein $y^\dagger \in \mathcal{H}$ existiert mit $\langle Ax, y\rangle = \left\langle x, y^\dagger\right\rangle \ \forall\ x \in \mathcal{H}$. Daher ist $y \in D(A^\dagger)$ mit $A^\dagger y = y^\dagger$.

□