Höhere Analysis, II

8. Übungsserie

V-1 Seien $A_i : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ lineare, evtl. unbeschränkte Operatoren, $i = 1, 2, 3$. Diskutieren Sie folgende Aussagen:

(a) $A_1(A_2A_3) = (A_1A_2)A_3$

(b) $(A_1 + A_2)A_3 = A_1A_3 + A_2A_3$

(c) $A_1(A_2 + A_3) \supseteq A_1A_2 + A_1A_3$

Geben Sie eine hinreichende Bedingung dafür an, dass in (c) Gleichheit gilt.

V-2 Seien $\mathbf{D}(A) \subseteq \mathbb{H}$ ein dichter Teilraum, sowie $A : \mathbf{D}(A) \to \mathbb{H}$ linear. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(i) $\mathbf{D}(A^*)$ ist ein linearer Raum, A^* ein linearer abgeschlossener Operator.

(ii) Für alle Erweiterungen $B \supseteq A$ folgt $A^* \supseteq B^*$.

(iii) Falls A abschließbar ist, so gilt $A^* = \overline{A}^*$.

(iv) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathbf{D}(A - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{H}}) = \mathbf{D}(A)$. Dann gilt

$$(A - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{H}})^* = A^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}_{\mathbb{H}} \qquad \text{mit} \quad \mathbf{D}(A^*) = \mathbf{D}\left((A - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{H}})^*\right).$$

V-3 Seien $\mathbf{D}(A) = \{x \in \ell_2(\mathbb{N}) : \ x \in c_{00}(\mathbb{N})\} \subset \ell_2(\mathbb{N})$, und

$$A : \mathbf{D}(A) \to \ell_2(\mathbb{N}) \quad \text{mit} \quad A : (x_j)_j \mapsto Ax = (jx_j)_j.$$

(a) Zeigen Sie, dass A unbeschränkt und nicht abgeschlossen ist.

(b) Besitzt A eine echte lineare Erweiterung?

(c) Kann A linear auf den ganzen Raum $\ell_2(\mathbb{N})$ erweitert werden?

(d) Zeigen Sie, dass B mit $\mathbf{D}(B) = \{x \in \ell_2(\mathbb{N}) : \ (jx_j)_j \in \ell_2(\mathbb{N})\}$, $Bx = (jx_j)_j$, $x \in \mathbf{D}(B)$, eine abgeschlossene Erweiterung von A ist.

Hinweis: Beweisen Sie, dass für einen abgeschlossenen, injektiven linearen Operator $A : \mathbf{D}(A) \to \mathbb{H}$ stets A^{-1} abgeschlossen ist.

V-4 Beweisen Sie: Wenn A und B derart sind, dass AB dicht auf $\mathbb{H}$ definiert ist, so gilt stets

$$(AB)^* \supseteq B^*A^*.$$

Ist zusätzlich A auf ganz $\mathbb{H}$ definiert und beschränkt, so ist $(AB)^* = B^*A^*$.