

Höhere Analysis 2
FSU Jena - SS 2011
Serie 07 - Lösungen

Stilianos Louca

June 20, 2011

Aufgabe IV-06

Fall $X = \mathcal{C}(\overline{\Omega})$

- (a) Die Bilinearität von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist klar. Aufgrund der Symmetrie von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ genügt es zu zeigen dass $\langle \varphi, \cdot \rangle \neq 0$ für jedes $\varphi \neq 0$. Tatsächlich, existiert aufgrund der Stetigkeit von φ eine offene Menge $U \neq \emptyset$ mit $\overline{U} \subseteq \Omega$ so dass φ auf $\overline{U}$ nicht-null ist und konstantes Vorzeichen hat (o.B.d.A. positiv). Es existiert natürlich eine Funktion $0 \leq f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ so dass $\text{supp}(f) \subseteq \overline{U}$ und $\text{supp}(f)$ nicht-leeres inneres hat (z.B. $f(x) := d(x, U^c)$). Daher ist $\int f \cdot \varphi = \int_{\text{supp}(f)} f \cdot \varphi$ echt positiv und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nicht-entartet.

Alternativ: Nehme an $\langle \varphi, \cdot \rangle = 0$ für irgendein $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, dann ist insbesondere $0 = \langle \varphi, \overline{\varphi} \rangle = \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}$. Daher ist φ fast-überall null, wegen Stetigkeit sogar überall null.

- (b) Wir zeigen dass $K^\dagger$ auch ein Integraloperator ist mit Kern $k^\dagger(x, y) := k(y, x)$. Tatsächlich gilt für $\varphi \in X, \psi \in Y^\dagger$

$$\langle K\varphi, \psi \rangle = \int_{\Omega} \psi(x) \int_{\Omega} k(x, y) \varphi(y) \, dy \, dx \stackrel{(\clubsuit)}{=} \int_{\Omega} \varphi(y) \int_{\Omega} \underbrace{k(x, y)}_{=: k^\dagger(y, x)} \psi(x) \, dx \, dy = \langle \varphi, K^\dagger \psi \rangle, \quad (0.1)$$

wobei in $(\clubsuit)$ der Satz von Fubini und

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} |\psi(x) k(x, y) \varphi(y)| \, dy \, dx \leq \|\psi\|_{\infty} \|k\|_{\infty} \|\varphi\|_{\infty} \cdot \text{Vol}(\Omega \times \Omega) < \infty \quad (0.2)$$

verwendet wurde. Nach Satz 2.13 (siehe Vorlesung Höhere Analysis I, WS 2010/2011) ist $K^\dagger \in \mathcal{K}(\mathcal{C}(\overline{\Omega}))$.

Fall $X = L_2(\Omega)$

- (a) Es sei $0 \neq \varphi \in L_2(\Omega)$, dann existiert eine messbare Menge $A \subseteq \Omega$ mit positivem Maß so dass $\varphi|_A$ nicht-null ist mit einheitlichem Vorzeichen (o.B.d.A. positiv). Setze $\psi := 1_A$, dann ist $\langle \varphi, \psi \rangle = \int_A \varphi > 0$, sprich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist nicht-entartet.

Alternativ: $\langle \varphi, \cdot \rangle = 0$ impliziert $0 = \langle \varphi, \overline{\varphi} \rangle = \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}$ und daher $\varphi = 0$ fast überall.

- (b) Es ist immer noch $K^\dagger = K$, da Schritt $(\clubsuit)$ aufgrund von

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\Omega} |\psi(x) k(x, y) \varphi(y)| \, dy \, dx &= \|k \cdot (\psi \otimes \varphi)\|_{L_1(\Omega \times \Omega)} \leq \|k\|_{L_2(\Omega \times \Omega)} \cdot \|\varphi \otimes \psi\|_{L_2(\Omega \times \Omega)} \\ &\leq \|k\|_{L_2(\Omega \times \Omega)} \cdot \|\varphi\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|\psi\|_{L_2(\Omega)} < \infty \end{aligned} \quad (0.3)$$

noch stets gültig ist. Nach Satz 2.13 ist auch immer noch $K \in \mathcal{K}(L_2(\Omega))$.

Aufgabe IV-07

Beachte dass $(X, X^\dagger) := (\mathcal{C}[0, 2\pi], \mathcal{C}[0, 2\pi])$ mit $\langle x, y \rangle := \int_0^{2\pi} x(t)y(t) dt$ ein Dualsystem ist. Der Operator $K : X \rightarrow X$ definiert durch

$$x \mapsto Kx := \int_0^{2\pi} k(\cdot, t)x(t) dt \quad (0.4)$$

mit $k(s, t) := \frac{1}{\pi} \sin(s+t)$ ist nach Satz 2.13 (siehe Vorlesung Höhere Analysis I, WS 2010/2011) kompakt wobei nach Aufgabe 01(b) $K^\dagger = K$.

- Definiere nun $x(t) := \sin(t) + \cos(t)$, dann ist $(1 - K)x = 0$, sprich $\ker(1 - K)$ hat mindestens Dimension 1. Da $x(t) \equiv 1$ eine (spezielle) Lösung von $(1 - K)x = 1$ ist, ist der Lösungsraum von $(1 - K)x = 1$ mindestens 1-dimensional.
- Da $\text{image}(1 - K) \subseteq \ker(1 - K^\dagger)_\perp$ (siehe Lemma 4.16, Vorlesung Höhere Analysis II, SS 2011), genügt es zu zeigen dass $y(s) := s$ nicht in $\ker(1 - K^\dagger)_\perp$ liegt. Setze $x(s) := \sin(s) + \cos(s)$, dann ist $x \in \ker(1 - K) = \ker(1 - K^\dagger)$ und es gilt

$$\langle y, x \rangle = -2\pi \neq 0, \quad (0.5)$$

was zu zeigen war.

Alternative

Der Operator K ist kompakt, so dass nach der Fredholmschen Alternative (siehe Satz 4.23, Vorlesung Höhere Analysis II, SS 2011) genau eine der folgenden Aussagen gilt:

F01. Sowohl $1 - K$ als auch $1 - K^\dagger$ sind bijektiv.

F02. $\dim \ker(1 - K) = \dim \ker(1 - K^\dagger) \in \mathbb{N}$, $R(1 - K) = \ker(1 - K^\dagger)_\perp$ und $R(1 - K^\dagger) = \ker(1 - K)_\perp$.

Beachte dass nach Aufgabe 01 gilt $K = K^\dagger$.

Behauptung: $1 - K$ ist injektiv und besitzt den Kern $\text{span}\{x_0\}$ mit $x_0(t) := \cos(t) + \sin(t)$.

Beweis: Es ist leicht auszurechnen dass tatsächlich $(1 - K)x_0 = 0$. Sei andererseits $x \in \ker(1 - K)$, dann gilt

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\sin(s) \cos(t) + \cos(s) \sin(t)) x(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \sin(s) \cdot \int_0^{2\pi} \cos(t) x(t) dt + \frac{1}{\pi} \cos(s) \cdot \int_0^{2\pi} \sin(t) x(t) dt \\ &=: A \sin(s) + B \cos(s), \end{aligned} \quad (0.6)$$

wobei

$$\begin{aligned} A &:= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) x(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [A \cos(t) \sin(t) + B \cos^2(t)] dt \\ &= (..) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t) x(t) dt =: B, \end{aligned} \quad (0.7)$$

das heißt $x \in \text{span}\{x_0\}$.

Daher ist $R(1 - K) = \ker(1 - K)_\perp$, wobei das Problem $(1 - K)x \stackrel{!}{=} y$ ($y \in \mathcal{C}[0, 2\pi]$ gegeben) entweder keine oder unendlich viele Lösungen hat, jeweils genau dann wenn $y \notin \ker(1 - K)_\perp$ oder $y \in \ker(1 - K)_\perp$ bzw. jeweils genau dann wenn $y \not\perp x_0$ oder $y \perp x_0$.

Für den Fall $y \equiv 1$ lässt sich leicht ausrechnen dass $\langle y, x_0 \rangle = 0$ so dass $(1 - K)x = y$ unendlich viele Lösungen hat. Für den Fall $y(t) = t$ lässt sich leicht ausrechnen dass $\langle y, x_0 \rangle \neq 0$ so dass $(1 - K)x = y$ keine Lösungen hat.

Aufgabe IV-08

Der Operator $K : X \rightarrow X$ ist idempotent da

$$K^2\psi(s) = \int_0^1 \int_0^1 k(s,t)k(t,\tau)\psi(\tau) dt d\tau = e^s \int_0^1 e^{-\tau}\psi(\tau) d\tau = K\psi(s), \quad (0.8)$$

für jedes $\varphi \in X$. Beachte dass in (0.9) Fubini und die Beschränktheit der k, φ verwendet wurde. Nach Behauptung 03 (siehe unten) ist für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| < 1$ der Operator $1 - \lambda K$ invertierbar mit

$$(1 - K)^{-1} = 1 + \frac{\lambda}{1 - \lambda} K. \quad (0.9)$$

Erinnerung 01

Sei X ein $\mathbb{K}$ -Banachraum und $A \in \mathcal{L}(X)$. Sind $\lambda_0, \lambda \in \mathbb{K}$ so dass $\lambda_0 \in \mathfrak{h}(A)$ und $|\lambda - \lambda_0| < \|(\lambda_0 - A)^{-1}\|$, so ist auch $\lambda \in \rho(A)$ und es gilt die Darstellung

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n \cdot (\lambda_0 - A)^{-(n+1)}, \quad (0.10)$$

wobei die Reihe in der Operatornorm konvergiert.

Erinnerung 02

Sei X ein $\mathbb{K}$ -Banachraum und $A \in \mathcal{L}(X)$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| < \infty$. Dann ist $(1 - A)$ invertierbar und es gilt

$$(1 - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n, \quad (0.11)$$

wobei die Reihe in der Operatornorm konvergiert.

Behauptung 03

Sei X ein $\mathbb{K}$ -Banachraum und $A \in \mathcal{L}(X)$ idempotent. Dann ist $(1 - \lambda A)$ für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| < 1$ invertierbar und es gilt

$$(1 - \lambda A)^{-1} = 1 + \frac{\lambda}{1 - \lambda} A. \quad (0.12)$$

Beweis: Da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \|(\lambda A)^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \|A\| < \infty$ konvergiert, ist $(1 - \lambda A)$ invertierbar mit

$$(1 - \lambda A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda A)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n A = 1 + \frac{\lambda}{1 - \lambda} A. \quad (0.13)$$

Diese Darstellung lässt sich auch durch eine direkte Probe verifizieren.

□