Höhere Analysis, II

7. Übungsserie

IV-6 Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge, $\mathbb{X} = \mathbb{X}^+ = \mathsf{C}(\overline{\Omega})$.

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{X}, \mathbb{X}^+)$ ein Dualsystem ist mit der Bilinearform

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_\Omega \varphi(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \varphi, \psi \in \mathsf{C}(\overline{\Omega}).$$

Hinweis: Satz 1.87

(b) Seien zusätzlich $(\mathbb{Y}, \mathbb{Y}^+) = (\mathsf{C}(\overline{\Omega}), \mathsf{C}(\overline{\Omega}))$, $k \in \mathsf{C}(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ und K der Fredholmsche Integraloperator

$$(K\varphi)(x) = \int_\Omega k(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y, \quad \varphi \in \mathsf{C}(\overline{\Omega}),\ x \in \Omega.$$

Bestimmen Sie $K^+ : \mathsf{C}(\overline{\Omega}) \to \mathsf{C}(\overline{\Omega})$, und zeigen Sie $K^+ \in \mathcal{K}(\mathsf{C}(\overline{\Omega}))$.

Was passiert für $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = L_2(\Omega)$ (mit gleicher Bilinearform) und $k \in L_2(\Omega \times \Omega)$?

Hinweis: Satz 2.13

IV-7 Zeigen Sie, dass die Integralgleichung

$$x(s) - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(s+t)x(t)\,\mathrm{d}t = y(s)$$

im Falle $y(s) \equiv 1$ unendlich viele, im Falle $y(s) \equiv s$ keine Lösungen in $\mathsf{C}[0, 2\pi]$ besitzt.

IV-8 Seien $\mathbb{X} = \mathsf{C}[0,1]$, $k(s,t) = e^{s-t}$ und

$$K\varphi(s) = \int_0^1 k(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Finden Sie $(\,\mathrm{id}_{\mathbb{X}} - \lambda K)^{-1}$ für $|\lambda| < 1$:

(a) direkt,

(b) mit Hilfe von iterierten Kernfunktionen.

IV-9 Seien $\mathbb{X} = \ell_p(\mathbb{N})$, $K : \ell_p(\mathbb{N}) \to \ell_p(\mathbb{N})$, $K : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (0, x_1, 0, x_3, \dots)$, $1 \le p \le \infty$. Gilt für $A = \mathrm{id}_{\mathbb{X}} - K$ die Fredholm-Alternative?