Höhere Analysis 2
FSU Jena - SS 2011
Serie 06 - Lösungen

Stilianos Louca

May 30, 2011

Aufgabe IV-1

- Wir schreiben $\alpha^k := (\alpha_n^k)_n$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Beachte dass

$$\ker(D_\alpha^k) = \left\{x \in l_2(\mathbb{N}) : \operatorname{supp}(x)^c \cap \operatorname{supp}(\alpha^k)^c = \emptyset\right\} = \{x \in l_2(\mathbb{N}) : \operatorname{supp}(x)^c \cap \operatorname{supp}(\alpha)^c = \emptyset\}\,, \tag{0.1}$$

sprich $\ker(D_\alpha^k) = \ker(D_\alpha^1)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Nun ist $\ker(D_\alpha^0) = \{0\}$ und $\ker(D_\alpha) = \{0\}$ genau dann wenn $\operatorname{supp}(\alpha) = \mathbb{N}$. Daher

$$r_0(D_\alpha) = \begin{cases} 0 & : \operatorname{supp}(\alpha) = \mathbb{N} \\ 1 & : \text{sonst} \end{cases}. \tag{0.2}$$

- Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $y = (y_n)_n \in l_2(\mathbb{N})$ im Bild von D_α^k genau dann wenn $x^{(k)} = \left(x_n^{(k)}\right)_n \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ definiert durch

$$x_n^{(k)} := \begin{cases} \frac{y_n}{\alpha_n^k} & : \alpha_n \neq 0 \\ 0 & : \alpha_n = 0 \end{cases}. \tag{0.3}$$

in $l_2(\mathbb{N})$ liegt und $y_n = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $\alpha_n = 0$.

Fall 01: $\inf\{|\alpha_n| : n \in \mathbb{N}\} > 0$. Dann ist $x^{(k)} \in l_2(\mathbb{N})$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, sprich $\operatorname{image}(D_\alpha^k) = l_2(\mathbb{N})\ \forall k \in \mathbb{N}_0$ und $r^0(D_\alpha) = 0$.

Fall 02: $\inf\{|\alpha_n| : n \in \mathbb{N},\ \alpha_n \neq 0\} > 0$ und es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\alpha_{n_0} = 0$. Dann ist $\operatorname{image}(D_\alpha^k) = \operatorname{image}(D_\alpha^l) \subsetneq l_2(\mathbb{N})$ für alle $k, l \in \mathbb{N}$, daher $r^0(D_\alpha) = 1$.

Fall 03: Es existiert eine Teilfolge $(\alpha_{n_m})_m \subseteq (\alpha_n)_n$ mit $\alpha_{n_m} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und $\alpha_{n_m} \neq 0\ \forall m$. Dann kann man o.B.d.A. annehmen dass diese monoton fällt mit $\limsup\limits_{m\to\infty} \left|\frac{\alpha_{n_m}}{\alpha_{n_{m+1}}}\right|^2 > 4$.

Sei nun $k \in \mathbb{N}$ fest. Wähle $y = (y_n)_n \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ gemäß

$$y_n := \begin{cases} \frac{\alpha_{n_m}^k}{2^{m/2}} & : n = n_m \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}, \tag{0.4}$$

dann ist $y \in l_2(\mathbb{N})$ im Bild von D_α^k, da $x^{(k)}$ definiert durch (0.3) in $l_2(\mathbb{N})$ liegt. Anderseits nimmt $x^{(k+1)}$ die Form

$$x_n^{(k+1)} = \begin{cases} \frac{1}{2^{m/2}} \frac{1}{\alpha_{n_m}} & : n = n_m \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \tag{0.5}$$

an und erfüllt $\liminf\limits_{m\to\infty} \left|\frac{x_{n_{m+1}}^{(k+1)}}{x_{n_m}^{(k+1)}}\right|^2 = \frac{1}{2} \cdot \liminf\limits_{m\to\infty} \left|\frac{\alpha_{n_m}}{\alpha_{n_{m+1}}}\right|^2 > 2$. Daher ist $\sum_n \left|x_{n_m}^{(k+1)}\right|^2$ divergent und $x^{(k+1)}$ nicht in $l_2(\mathbb{N})$, sprich y nicht im Bild von $D_\alpha^{(k+1)}$. Dies zeigt dass $\operatorname{image}(D_\alpha^k) \supsetneq \operatorname{image}(D_\alpha^{(k+1)})$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Dementsprechend also $r^0(D_\alpha) = \infty$.

Aufgabe IV-2

Nennen $R(T) := \text{image}(T)$ für jeglichen linearen Operator T.

(a) Zu zeigen wäre $\rho(A) = \rho(A')$.

- Nehme an $(\lambda - A)$ ist invertierbar für irgendein $\lambda \in \mathbb{K}$. Setze $\widetilde{A} := \left[(\lambda - A)^{-1}\right]'$, dann gilt für jedes $a \in X'$ und $x \in X$ dass

$$\left\langle x, \widetilde{A} \circ (\lambda - A')a \right\rangle = \left\langle (\lambda - A)^{-1}x, (\lambda - A')a \right\rangle = \left\langle (\lambda - A)(\lambda - A)^{-1}x, a \right\rangle = \langle x, a \rangle \,, \tag{0.6}$$

  sprich $\widetilde{A} \circ (\lambda - A')$ ist die Identität auf X'. Genauso zeigt mann dass auch $(\lambda - A') \circ \widetilde{A} = \mathrm{Id}_{X'}$, sprich $\widetilde{A} = (\lambda - A')^{-1}$. Daher ist $\rho(A) \subseteq \rho(A')$.
- Nehme an $(\lambda - A')$ ist invertierbar für irgendein $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann ist $\ker(\lambda - A') = \{0\}$ und $R(\lambda - A') = X'$ und daher nach Erinnerung 04 (siehe unten) $R(\lambda - A)^{\perp} = \{0\}$ und $\ker(\lambda - A) = (X')_{\perp}$. Nach Hahn-Banach ist $(X')_{\perp} = \{0\}$, das heißt $(\lambda - A)$ ist injektiv. Nach Hahn-Banach folgt aus $R(\lambda - A)^{\perp} = \{0\}$ dass $\overline{R(\lambda - A)} = X$. Da $R(\lambda - A')$ abgeschlossen ist (stärker: gleich X' ist), folgt nach dem Satz vom abgeschlossenem Bild (siehe unten) dass auch $R(\lambda - A)$ abgeschlossen ist, das heißt $R(\lambda - A) = \overline{R(\lambda - A)} = X$. Daher ist $(\lambda - A)$ surjektiv bzw. invertierbar.

(b)
- Zu zeigen wäre dass $(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}$. Äquivalent dazu wäre zu zeigen dass $(\lambda - A)^{-1}(\mu - A) - 1 = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}$ (Multiplikation von rechts mit $(\mu - A)$). Äquivalent dazu wäre zu zeigen dass $(\mu - A) - (\lambda - A) = (\mu - \lambda)$ (Multiplikation von links mit $(\lambda - A)$). Doch dies ist evident.
- Zu zeigen wäre dass $(\lambda - A)^{-1} - (\lambda - B)^{-1} = (\lambda - A)^{-1}(A - B)(\lambda - B)^{-1}$. Äquivalent dazu wäre zu zeigen dass $(\lambda - B) - (\lambda - A) = A - B$ (Multiplikation von links und rechts mit jeweils $(\lambda - A)$ und $(\lambda - B)$). Doch dies ist evident.

Aufgabe IV-3

(a) Beachte dass für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $x = (x_k)_k \in l_2(\mathbb{N})$ gilt

$$(\lambda - R)(x) = (\lambda x_1, \lambda x_2 - x_1, \lambda x_3 - x_2, ..). \tag{0.7}$$

- Wir zeigen $\sigma_p^*(R) = \emptyset$. Da R injektiv ist, ist schon mal $0 \notin \sigma_p^*(R)$. Nehme an $\lambda x - Rx = 0$ für irgendein $x = (x_k)_k \in l_2(\mathbb{N})$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann müsse gelten $\lambda x_1 = 0$, sprich $x_1 = 0$. Gleichfalls muss gelten $\lambda x_2 - x_1 = 0$, sprich $x_2 = 0$. Induktiv folgt also $x_k = 0$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, sprich $x = 0$. Dies bedeutet dass R tatsächlich keine Eigenwerte besitzt.
- Wir zeigen $\sigma(R) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$ bzw. $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > 1\} \subseteq \rho(R)$. Dabei genügt es nach obigem Punkt zu zeigen, dass $(\lambda - R)$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > 1$ surjektiv ist. Sei $y = (y_k)_k \in l_2(\mathbb{N})$ gegeben. Setze $x_1 := y_1/\lambda$ und induktiv $x_k := (y_k + x_{k-1})/\lambda$, sprich

$$x_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{y_{k+1-j}}{\lambda^j}. \tag{0.8}$$

  Dann folgt

$$\begin{aligned}
\sum_k |x_k|^2 &\leq \sum_k \left[\sum_{j=1}^{k} \frac{y_{k+1-j}}{\lambda^j} \right]^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} \frac{|y_{k+1-j}|\,|y_{k+1-i}|}{|\lambda|^{i+j}} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^{i+j}} \sum_{k \geq \max\{i,j\}} |y_{k+1-i}|\,|y_{k+1-j}| \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^{i+j}} \sum_{k \geq \max\{i,j\}} \left(|y_{k+1-i}|^2 + |y_{k+1-j}|^2 \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\|y\|_2^2}{|\lambda|^{i+j}} < \infty,
\end{aligned} \tag{0.9}$$

das heißt $x \in l_2(\mathbb{N})$. Da $(\lambda - R)x = y$, ist $(\lambda - R)$ surjektiv.

Alternative: Nach Erinnerung 03 (siehe unten) gilt $\sigma(R) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$ da $\|R\| \leq 1$.

- Wir zeigen dass $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\} \subseteq \sigma(R)$. Dabei genügt es zu zeigen dass $\lambda - R$ für $|\lambda| \leq 1$ nicht surjektiv sein kann. Im Fall $\lambda = 0$ ist dies klar denn $(1, 0, 0..) \in l_2(\mathbb{N})$ hat unter R kein Urbild. Nehme also an $0 < |\lambda| \leq 1$.

  Definiere $y := (y_k)_k$ und $(x_k)_k$ wie folgt: Setze $x_1 := 1$, $y_1 := \lambda$ und induktiv

$$y_k := \frac{e^{i \arg(x_{k-1})}}{k} \quad , \quad x_k := \frac{y_k + x_{k-1}}{\lambda} \tag{0.10}$$

  für $k \geq 2$. Dann gilt $y = (y_k)_k \in l_2(\mathbb{N})$ und

$$|x_k| = \frac{|y_k| + |x_{k-1}|}{|\lambda|} = (..) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \cdot \frac{1}{|\lambda|^{k-j+1}} \geq \frac{1}{|\lambda|^k} \overset{|\lambda| \leq 1}{\geq} \frac{1}{|\lambda|}, \tag{0.11}$$

  deshalb $x := (x_k)_k \notin l_2(\mathbb{N})$. Ist nun $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_k)_k \in l_2(\mathbb{N})$ so dass $y = (\lambda - R)\widetilde{x}$, so muss nach (0.7) gelten $\widetilde{x}_1 = 1$ und $\widetilde{x}_k = (y_k + \widetilde{x}_{k-1})/\lambda$ für jedes $k \geq 2$, sprich $\widetilde{x} = x$, ein Widerspruch da $x \notin l_2(\mathbb{N})$. Daher hat y unter $(\lambda - R)$ kein Urbild in $l_2(\mathbb{N})$ und $\lambda \in \sigma(R)$.

  Alternative: Wir zeigen dass $(1, 0, ..) \in l_2(\mathbb{N})$ unter $(\lambda - R)$ für $\lambda \neq 0$ kein Urbild besitzt. Tatsächlich müsste dessen Urbild $x = (x_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ die Gestalt $\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^2}, ..\right)$ haben, wäre jedoch nicht in $l_2(\mathbb{N})$.

(b)

- Wir zeigen dass $\sigma_p^*(T) = \emptyset$. Offensichtlich ist T injektiv, so dass $0 \notin \sigma_p^*(T)$. Nehme an $\lambda x - Tx = 0$ für irgendein $x = (x_k)_k \in l_1(\mathbb{N})$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann müsse gelten $\lambda x_1 = 0$, sprich $x_1 = 0$. Gleichfalls muss gelten $\lambda x_2 - x_1 = 0$, sprich $x_2 = 0$. Genauso muss gelten $\lambda x_3 - \frac{x_2}{2} = 0$, sprich $x_3 = 0$. Induktiv schlussfolgert man $x = 0$, sprich T besitzt keine Eigenwerte.
- Offensichtlich ist $0 \in \sigma(T)$ da $(1, 0, ..) \in l_1(\mathbb{N})$ bzgl. T kein Urbild besitzt und daher T nicht invertierbar ist.
- Wir zeigen nun dass $\sigma(T) \subseteq \{0\}$. Nach vorigem Punkt genügt es für jedes $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ zu zeigen dass $(\lambda - T)$ surjektiv ist. Sei $y = (y_k)_k \in l_1(\mathbb{N})$ gegeben. Setze $x_1 := y_1/\lambda$ und induktiv $x_k := \left(y_k + \frac{x_{k-1}}{k-1}\right)/\lambda$. Zu zeigen bliebe $x \in l_1(\mathbb{N})$, denn dann wäre $y = Tx$. Es folgt direkt durch vollständige Induktion dass

$$|x_k| \leq \frac{\|y\|_\infty}{|\lambda|^k (k-1)!} + \frac{1}{(k-1)!} \sum_{j=1}^{k} \frac{|y_j| (j-1)!}{|\lambda|^{k+1-j}}, \tag{0.12}$$

  so dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \leq \underbrace{\frac{\|y\|_\infty}{\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^{-(k-1)}}{(k-1)!}}_{<\infty} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \sum_{j=1}^{k} \frac{|y_j| (j-1)!}{|\lambda|^{k+1-j}}. \tag{0.13}$$

  Zu zeigen bleibt dass der rechte Summand in (0.13) endlich ist. Er lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \sum_{j=1}^{k} \frac{|y_j| (j-1)!}{|\lambda|^{k+1-j}} &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \frac{|y_j| (j-1)!}{|\lambda|^{k+1-j}} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} |y_j| \sum_{k=j}^{\infty} \frac{(j-1)!}{(k-1)!} \frac{1}{|\lambda|^{k+1-j}} \\ &= \frac{1}{|\lambda|} \sum_{j=1}^{\infty} |y_j| \sum_{k=j}^{\infty} \frac{(j-1)!}{(k-1)!} \frac{1}{|\lambda|^{k-j}} \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{j=1}^{\infty} |y_j| \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{(k-j)!} \frac{1}{|\lambda|^{k-j}} \\ &= \frac{1}{|\lambda|} \sum_{j=1}^{\infty} |y_j| \exp\left[\tfrac{1}{|\lambda|}\right] = \frac{\|y\|_1}{|\lambda|} \cdot \exp\left[\tfrac{1}{|\lambda|}\right] < \infty, \end{aligned} \tag{0.14}$$

so dass tatsächlich $x \in l_1(\mathbb{N})$.

Alternative: Wir zeigen dass $\sigma(T) \subseteq \{0\}$, indem wir Folgerung 02 (siehe unten) und die Tatsache dass $\sigma_p^*(T) = \emptyset$ anwenden. Dazu genügt es zu zeigen dass T kompakt ist. Dazu wiederum genügt es zu zeigen dass T Grenzwert kompakter Operatoren ist. Tatsächlich sind $T_n \in \mathcal{L}(l_1(\mathbb{N}))$ definiert durch

$$T_n : (x_n)_n \mapsto \left(0, x_1, \frac{x_2}{2}, .., \frac{x_n}{n}, 0, ..\right) \tag{0.15}$$

kompakt und konvergieren gegen T.

□

Aufgabe IV-4

(a)

- Offensichtlich ist $\|T\| = 1$. Es ist $Tx = \lambda x$ für irgendein $x \in l_\infty(\mathbb{N})$ genau dann wenn $x_{k+1} = \lambda x_k \ \forall k$, sprich $x_k = \lambda^k x_1 \ \forall k$. Dies kann nur erfüllt sein wenn $x = 0$ oder $|\lambda| \leq 1$, sprich $\sigma_p^*(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$. Der Vektor $x = (1, \lambda, \lambda^2, ..) \in l_\infty(\mathbb{N})$ ist Eigenvektor zu $\lambda \in \mathbb{C}$ falls $|\lambda| \leq 1$, so dass sogar $\sigma_p^*(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$.
- Wir zeigen nun: $\sigma(T) = \sigma_p^*(T)$. Sei nun $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > 1$. Sei $y = (y_k)_k \in l_\infty(\mathbb{N})$ gegeben. Setze

$$x := \sum_{k=1}^{\infty} y_k \cdot \left(\frac{1}{\lambda^k}, \frac{1}{\lambda^{k-1}}, .., \frac{1}{\lambda}, 0, ..\right), \tag{0.16}$$

wobei der Reihengrenzwert punktweise zu verstehen ist, sprich

$$x_n := \sum_{k=n}^{\infty} \frac{y_k}{\lambda^{k+1-n}}. \tag{0.17}$$

Beachte dass y beschränkt und $|\lambda| > 1$ ist, daher die Reihe (0.17) konvergiert. Nun ist

$$|x_n| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|y_k|}{|\lambda|^{n+1-k}} \leq \|y\|_\infty \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^k}}_{\text{const}<\infty}, \tag{0.18}$$

sprich $\|x\|_\infty < \infty$. Aus der Darstellung (0.17) folgt dass $Tx = y$. $(\lambda - T)$ ist also surjektiv und natürlich injektiv nach voriger Überlegung, daher $\lambda \in \rho(T)$.

Alternative: Nach Erinnerung 03 (siehe unten) gilt $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$ da $\|T\| \leq 1$.
- Wir zeigen dass T nicht kompakt ist. Sei B die abgeschlossene Einheitskugel in $l_\infty(\mathbb{N})$, dann gilt $T(B) = B$. Da $l_\infty(\mathbb{N})$ unendlich-dimensional ist, ist B nicht relativ kompakt, daher T nicht kompakt.

□

(b)

- Wir zeigen dass $\|T\| = 1$. Da $|Tf(x)| \leq \|f\|$ für jedes $x \in [0,1]$ ist schonmal $\|T\| \leq 1$. Betrachten nun die stückweise linearen, stetigen Funktionen

$$f_n(x) := \begin{cases} nx & : 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & : \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}. \tag{0.19}$$

Diese erfüllen $\|f_n\| = 1 \ \forall n$ und $Tf_n(1) = \int_0^1 f_n(t)\, dt \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, das heißt $\|T\| \geq 1$.
- Wir zeigen dass $\sigma_p^*(T) = \emptyset$. Der Operator T ist injektiv, denn $\int\limits_0^x f(t)\, dt = 0 \ \forall x$ impliziert (nach Ableiten) $f(x) = 0 \ \forall x$. Nun sei $f \in X$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $Tf = \lambda f$. Da f stetig ist, ist Tf (und daher λf) differenzierbar und es gilt $\frac{d}{dx} Tf(x) = f(x)$, sprich $f = \lambda f'$. Dies ist genau dann erfüllt wenn $f(x) = f(0)e^{-\lambda x} = 0$, sprich $\sigma_p^*(T) = \emptyset$.

- Wir zeigen dass $T : X \to X$ kompakt ist. Nach Ascoli (siehe unten) genügt es zu zeigen dass $\mathcal{F} := T(B)$ eine Familie gleichgradig, gleichmäßig stetiger, punktweise total beschränkter Funktionen ist, wobei $B \subseteq X$ die Einheitskugel in X sei. Da T stetig ist, ist $\mathcal{F}$ beschränkt und damit insbesondere punktweise total-beschränkt. Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Setze $\delta := \varepsilon$, dann gilt für $f \in B$ und $x < y \in X$ mit $|x - y| \leq \delta$ stets

$$|f(x) - f(y)| \leq \int\limits_x^y \underbrace{|f(t)|}_{\leq 1} \, dt \leq |y - x| \leq \varepsilon, \tag{0.20}$$

sprich $\mathcal{F}$ ist gleichgradig, gleichmäßig stetig.

- Wir zeigen dass $0 \in \sigma(T)$. Offensichtlich ist $T : X \to X$ nicht surjektiv, denn Tf ist für alle $f \in X$ differenzierbar, X enthält jedoch mehr als *nur* differenzierbare Funktionen.

- Wir zeigen dass $\sigma(T) \subseteq \{0\}$, indem wir direkt zeigen dass für $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ der Operator $(\lambda - T) : X \to X$ surjektiv ist. Tatsächlich ist für $F \in X$ die Funktion[1]

$$f(x) := \frac{e^{\frac{x}{\lambda}}}{\lambda^2} \int\limits_0^x F(t) e^{-\frac{t}{\lambda}} \, dt + \frac{F(x)}{\lambda} \tag{0.21}$$

ein Urbild bzgl. $(\lambda - T)$, denn

$$\begin{aligned}
&\lambda f(x) - \int\limits_0^x f(t) \, dt = \frac{e^{\frac{x}{\lambda}}}{\lambda} \int\limits_0^x F(t) e^{-\frac{t}{\lambda}} \, dt + F(x) - \frac{1}{\lambda^2} \int\limits_0^x e^{\frac{t}{\lambda}} \int\limits_0^t F(\tau) e^{-\frac{\tau}{\lambda}} d\tau - \frac{1}{\lambda} \int\limits_0^x F(t) \, dt \\
&\overset{(\clubsuit)}{=} \frac{e^{\frac{x}{\lambda}}}{\lambda} \int\limits_0^x F(t) e^{-\frac{t}{\lambda}} \, dt + F(x) - \frac{1}{\lambda^2} \left[\lambda e^{\frac{t}{\lambda}} \int\limits_0^t F(\tau) e^{-\frac{\tau}{\lambda}} d\tau \Bigg|_{t=0}^{x} - \int\limits_0^x \lambda e^{\frac{t}{\lambda}} F(t) e^{-\frac{t}{\lambda}} dt \right] - \frac{1}{\lambda} \int\limits_0^x F(t) \, dt \\
&= F(x),
\end{aligned} \tag{0.22}$$

wobei in Schritt ($\clubsuit$) die stetige Differenzierbarkeit von $t \mapsto \int_0^t F(\tau) e^{-\frac{\tau}{\lambda}}$ und partielle Integration verwendet wurde.

Alternative: Nach Folgerung 02 (siehe unten) und der Kompaktheit von T wissen wir dass $\sigma(T) \subseteq \{0\} \cup \sigma_p^*(T)$. Doch $\sigma_p^*(T) = \emptyset$, wonach wir fertig sind.

$\square$

Aufgabe IV-5

Bemerke dass

$$\begin{aligned}
p(\lambda) - p(T) &= \sum_{k=1}^n a_k \cdot (\lambda^k - T^k) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot (\lambda - T) \sum_{j=1}^k \lambda^j T^{k-j} \\
&= (\lambda - T) \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^k \lambda^j T^{k-j} \\
&= \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^k \lambda^j T^{k-j} (\lambda - T)
\end{aligned} \tag{0.23}$$

mit $a_n := 1$. Daher ist insbesondere

$$\operatorname{image}(\lambda - T) \supseteq \operatorname{image}(p(\lambda) - p(T)) \tag{0.24}$$

[1] Wie man darauf kommt: Löse die Differentialgleichung $\lambda f' - f = F'$ und verwende partielle Integration um jegliche F' in der Lösung auf F zurückzuführen.

und

$$\ker(\lambda - T) \subseteq \ker(p(\lambda) - p(T)). \tag{0.25}$$

- Wir zeigen $p(\sigma(T)) \subseteq \sigma(p(T))$. Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $p(\lambda) \in \rho(p(T))$, sprich $(p(\lambda) - p(T))^{-1}$ existiert. Dann ist $(\lambda - T)$ nach (0.24) surjektiv und nach (0.25) injektiv, sprich $\lambda \in \rho(T)$. Dies zeigt dass $\lambda \in \sigma(T)$ impliziert $p(\lambda) \in \sigma(p(T))$.
- Wir zeigen $\sigma(p(T)) \subseteq p(\sigma(T))$. Es sei $\lambda \in \sigma(p(T))$. Wir schreiben das (komplexe) Polynom $\lambda - p(z)$ als Produkt linearer Faktoren

$$\lambda - p(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - p_j) \tag{0.26}$$

für geeignete $p_j \in \mathbb{C}$. Da $\lambda - p(T) = \prod_j (T - p_j)$ nicht-invertierbar ist, muss mindestens ein Faktor $(T - p_{j_0})$ nicht-invertierbar sein, sprich $p_{j_0} \in \sigma(T)$. Aus $\lambda - p(p_{j_0}) = 0$ folgt $p(p_{j_0}) = \lambda$ und daher $\lambda \in p(\sigma(T))$.

□

Erinnerung 01: Theorem von Ascoli

Sei (X, d_X) ein total beschränkter metrische Raum und (Y, d_Y) ein metrischer Raum. Sei $\mathcal{F}$ eine Familie von Funktionen $X \to Y$ gleichgradig, gleichmäßig stetig[2] und punktweise total-beschränkt[3]. Dann ist $\mathcal{F}$ total beschränkt bzgl. der ∞-metrik. Siehe [1], théorème 3.8.7 für einen Beweis.

Erinnerung 02

Sei X ein normierter Raum, $K : X \to X$ ein kompakter linearer Operator und $T \in \mathcal{L}(X)$ invertierbar. Dann ist $T - K \in \mathcal{L}(X)$ genau dann injektiv wenn er surjektiv ist.

Beweis: Siehe Folgerung 4.8, Vorlesung Höhere Analysis II, SS 2011.

Folgerung 02

Ist X ein normierter Raum und $K : X \to X$ ein kompakter linearer Operator, so gilt $\sigma(K) \setminus \{0\} = \sigma_p^*(K) \setminus \{0\}$.

Erinnerung 03

Sei X ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$. Es bezeichne $\rho(T) := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}$ den Spektralradius von T. Dann gilt $\rho(T) \leq \|T\|$ und $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \rho(T)\}$.

Erinnerung 04: Banachscher Trennungssatz

Sei X ein normierter Raum und $U \subseteq X$ ein Teilraum mit $\overline{U} \subsetneq X$. Dann ist $\{0\} \subsetneq U^\perp$.

Folgerung 04

Sei X ein normierter Raum und $U \subseteq X$, $V \subseteq X'$ Teilräume. Dann sind $U^\perp$ bzw. $V_\perp$ abgeschlossen und es gilt $(U^\perp)_\perp = \overline{U}$ bzw. $\overline{V} \subseteq (V_\perp)^\perp$.

[2] Das heißt für $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so dass $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$ für jedes $x \in X$ und $f \in \mathcal{F}$.
[3] Das heißt $\bigcup_{f\in\mathcal{F}} \{f(x)\}$ ist total beschränkt für jedes $x \in X$.

Erinnerung 05

Seien X, Y normierte Räume und $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, dazu der duale $A' \in \mathcal{L}(Y', X')$. Dann gilt $\ker(A') = \text{image}(A)^\perp$ und $\ker(A) = \text{image}(A')_\perp$.

Erinnerung 06: Satz vom abgeschlossenem Bild

Seien X, Y Banachräume und $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, dazu der duale $A' \in \mathcal{L}(Y', X')$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\text{image}(A)$ ist abgeschlossen in Y.
2. $\text{image}(A) = \ker(A')_\perp$.
3. $\text{image}(A')$ ist abgeschlossen in X'.
4. $\text{image}(A') = \ker(A)^\perp$.

References

[1] *Louca S.*, Analyse Fonctionnelle et Analyse Fourier - Manuscrit de cours
http://www.personal.uni-jena.de/~p6lost2/LibList/libraries/LIB_fsu_jena/MODULE_Analyse%20Fourier/CLASS_Artikel/UNIT_Manuscrit/Analyse%20Fourier.pdf (20.05.2011)